Über den c-Dual eines topologischen Vektorraumes

von E.Binz, H.-P. Butzmann und K.Kutzler

Nr. 15 1971

Über den c-Dual eines topologischen Vektorraumes.

von E. Binz, H.-P. Butzmann und K. Kutzler

M. Schroder zeigte, daß für einen topologischen R-Vektorraum E der mit der Limitierung der stetigen Konvergenz versehene c-Dualraum $L_c E$ aller stetigen, reellwertigen linearen Funktionale auf E ein lokalkompakter Limesvektorraum ist, d.h., daß jeder in $L_c E$ konvergente Filter eine kompakte Teilmenge von $L_c E$ enthält. (Den Beweis hierfür findet man in [2] .) In dieser Arbeit wollen wir innerhalb der Klasse der lokalkompakten R-Limesvektorräume diejenigen Objekte bestimmen, die isomorph zum c-Dualraum eines topologischen Vektorraumes sind. Dabei gehen wir von der Beobachtung aus, daß für jeden lokalkompakten Limesvektorraum F der c-Dual $L_c F$ ein vollständiger, lokalkonvexer, topologischer Vektorraum ist (siehe [2]) . Wir lösen unsere Aufgabe, indem wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß der natürliche Homomorphismus zwischen E und dem c-Bidual $L_c L_c E$ von E ein Homöomorphismus ist.

Ein Limesraum X wird nach M. Schroder [6] <u>lokalkompakt</u> genannt, wenn er separiert ist und wenn es zu jedem x aus X sowie zu jedem gegen x konvergenten Filter Φ eine kompakte Teilmenge K von X mit $K \in \Phi$ gibt. Es gilt (siehe [4], 5.4) :

<u>1. Lemma: Jeder lokalkompakte Limesraum ist in der Kategorie der Limesräume induktiver Limes seiner kompakten Teilmengen.</u>

Für eine Teilmenge M eines R-Vektorraumes V seien co(M) die konvexe und ΓM die absolutkonvexe Hülle von M .
Für einen Filter Φ auf V ist das Mengensystem

$\{ co(F) | F \in \Phi \}$ eine Filterbasis. Mit $co(\Phi)$ werde der hiervon auf V erzeugte Filter bezeichnet.

Ein Limesvektorraum E werde lokalkonvex genannt, wenn für jeden gegen o konvergenten Filter Φ folgt, daß auch $co(\Phi)$ gegen o konvergiert.

Für einen Limesvektorraum E sei E_k der assoziierte, lokalkonvexe, topologische Vektorraum.

Wir führen nun die für die folgenden Betrachtungen wichtige Klasse der L_c-Räume ein:

Ein Limesvektorraum E heiße L_c-Raum, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) E ist lokalkonvex und lokalkompakt.

(b) E_k ist separiert.

(c) Jede kompakte Teilmenge von E ist als Limesraum topologisch.

In Anlehnung an (1) kann man zeigen:

2.Lemma: Sei E ein L_c-Raum. Dann ist in der Kategorie der Limesräume E induktiver Limes der kompakten, absolutkonvexen Teilmengen von E.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jeder konvergente Filter auf E eine absolutkonvexe, kompakte Menge enthält. Hierfür werde zuerst bewiesen, daß jeder gegen o konvergente Filter Φ eine kompakte, konvexe Menge enthält. Da E lokalkonvex ist, gelten die Beziehungen $co(\Phi) \longrightarrow o$ und $\Phi \supseteq co(\Phi)$. Der Filter $co(\Phi)$ besitzt eine Basis aus konvexen Teilmengen von E. Da ferner E lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Teilmenge K von E mit $K \in co(\Phi)$. Als kompakte Teilmenge eines L_c-Raumes ist K

topologisch. Nun gibt es eine konvexe Teilmenge C_1 aus $co(\Phi)$ mit $C_1 \subseteq K$. Sei C die Adhärenz von C_1 bezüglich der Limitierung von E. Da K topologisch und kompakt ist und C_1 enthält, ist C gleich der abgeschlossenen Hülle von C_1 und somit kompakt. Da ferner die Adhärenz konvexer Mengen wieder konvex ist, ist C konvex. Wegen $\Phi \supseteq co(\Phi)$ und $C_1 \varepsilon co(\Phi)$ sowie $C_1 \subseteq C$ folgt $C \varepsilon \Phi$. Also enthält jeder gegen o konvergente Filter eine kompakte, konvexe Teilmenge. Sei nun x ein beliebiger Punkt aus E. Der Filter Ψ konvergiere gegen x. Wegen der Axiome eines Limesvektorraumes existiert dann ein gegen o konvergenter Filter Φ mit der Eigenschaft, daß $\Psi = \Phi + x$ gilt. Nach dem soeben Gezeigten enthält Φ eine kompakte, konvexe Menge C. Folglich liegt die kompakte, konvexe Menge $C+x$ in Ψ. Da in einem Limesvektorraum das Produkt einer kompakten Menge von Skalaren mit einer kompakten Menge von Vektoren kompakt ist, folgt, daß $\Gamma(C+x) = [-1,1] \cdot (C+x)$ kompakt sein muß. Damit ist das Lemma bewiesen.

<u>Bemerkung:</u> Das Lemma gilt natürlich auch, wenn man für den Limesvektorraum E nur die Bedingungen (a) und (c) aus der Definition eines $\mathcal{L}_c$-Raumes voraussetzt.

Im Folgenden werde für einen Limesvektorraum E der Raum der linearen, stetigen, reellwertigen Funktionale auf E mit $\mathcal{L}E$ bezeichnet. Versieht man E mit der Limitierung der stetigen Konvergenz (siehe [1]), so schreibt man für diesen Limesraum $\mathcal{L}_cE$ und nennt ihn den c-<u>Dualraum</u> von E. Der c-Dualraum $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_cE$ von $\mathcal{L}_cE$ wird der c-<u>Bidualraum</u> von E genannt. Der <u>kanonische Homomorphismus</u>

$$\kappa : E \longrightarrow L_c L_c E$$

gegeben durch

$$\langle x', \kappa(x) \rangle = \langle x, x' \rangle \qquad (x \in E , x' \in LE)$$

ist wohldefiniert und aufgrund der Eigenschaften der stetigen Konvergenz stetig. Er ist ferner genau dann injektiv, wenn E_k separiert ist.

Ein Limesvektorraum E wird c-reflexiv genannt, wenn der kanonische Isomorphismus $\kappa : E \longrightarrow L_c L_c E$ ein bistetiger Isomorphismus ist.

Im Folgenden soll die c-Reflexivität von L_c-Räumen nachgewiesen werden. Daraus können wir dann ableiten, daß jeder L_c-Raum der c-Dualraum eines vollständigen, lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes ist. Da andererseits aber nach [2] der c-Dualraum eines topologischen Vektorraumes ein L_c-Raum ist, sind damit die c-Dualräume von topologischen Vektorräumen durch die L_c-Räume vollständig charakterisiert.

Sei E ein L_c-Raum . Da E lokalkompakt ist, ist $C_c(E)$ - die R-Algebra aller stetigen, reellwertigen, auf E definierten Funktionen versehen mit der stetigen Konvergenz - nach einem Satz von M. Schroder [6] eine vollständige, lokalkonvexe, topologische Algebra. Die stetige Konvergenz ist hierbei die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von E . Der Unterraum LE ist in $C_c(E)$ abgeschlossen. Folglich ist der c-Dualraum $L_c E$ von E ein vollständiger, lokalkonvexer, topologischer Vektorraum. Nach [2] ist der c-Bidualraum $L_c L_c E$ von E wiederum ein lokalkompakter, lokalkonvexer Limesvektorraum mit separierter, assoziierter lokalkonvexer

Topologie, dessen kompakte Mengen als Teilmengen des c-einbettbaren Raumes $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ topologisch sind. (Siehe [1]). Die kanonische Abbildung κ ist injektiv, da E_k als separiert vorausgesetzt wurde. Wenn es nun gelingt zu zeigen, daß zu jeder kompakten, absolutkonvexen Teilmenge H von $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ eine kompakte und absolutkonvexe Teilmenge K von E mit $H \subset \kappa(K)$ existiert, so folgt, daß $\kappa^{-1}: H \longrightarrow E$ stetig ist. Da nach (2) $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ induktiver Limes seiner kompakten, absolutkonvexen Teilmengen ist, würde unter der soeben gemachten Hypothese folgen, daß κ bijektiv und κ^{-1} stetig ist. Also werde bewiesen:

<u>3.Lemma: Seien</u> E <u>ein</u> $\mathcal{L}_c$<u>-Raum und</u> H <u>eine kompakte, absolutkonvexe Teilmenge von</u> $\mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$. <u>Dann gibt es eine kompakte und absolutkonvexe Teilmenge</u> K <u>von</u> E <u>mit der Eigenschaft, daß</u> $H \subseteq \kappa(K)$ <u>gilt.</u>

<u>Beweis</u>: Sei $H \subseteq \mathcal{L}_c\mathcal{L}_c E$ kompakt und absolutkonvex. Nach [3], Theorem 7. muß H gleichstetig auf $\mathcal{L}_c E$ sein, d.h., die Polare ${}^{o}H$ von H in $\mathcal{L}_c E$ ist eine Nullumgebung. Da die Topologie von $\mathcal{L}_c E$ aber die kompakt-offene ist, muß es eine kompakte, absolutkonvexe Teilmenge K von E so geben, daß

$${}^{o}H \supseteq K^{o}$$

gilt. Daraus folgt:

$$H \subseteq ({}^{o}H)^{o} \subseteq K^{oo} .$$

Nun ist K in E kompakt, topologisch und absolutkonvex. Folglich ist K auch in E_k kompakt. Mit $(\mathcal{L}E)'$ bezeichnen wir den algebraischen Dualraum von $\mathcal{L}E$. Da E_k separiert ist, gilt $\mathcal{L}E = \mathcal{L}E_k$ und somit $(\mathcal{L}E)' = (\mathcal{L}E_k)'$. Nach Lemma 8, p.64, [5] gilt dann - angewendet auf E_k -

$$K^{oo} = \kappa(K) ,$$

so daß die Behauptung bewiesen ist.

Aus diesem Lemma und den vorangestellten Überlegungen folgt nun unmittelbar:

4. Satz: Ein L_c-Raum ist c-reflexiv.

Da ein L_c-Raum c-reflexiv ist, ist er bistetig isomorph zum c-Dualraum $L_c L_c E$ des vollständigen, lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes $L_c E$. Daraus folgt:

5. Satz: Ein Limesvektorraum E ist genau dann c-Dualraum eines topologischen Vektorraumes, wenn er ein L_c-Raum ist. Wenn ein Limesvektorraum c-Dualraum eines topologischen Vektorraumes ist, so ist er sogar c-Dualraum eines vollständigen, lokalkonvexen, topologischen Vektorraumes.

Wenn E ein L_c-Raum ist, so gibt es einen topologischen Vektorraum F derart, daß E bistetig isomorph zu $L_c F$ ist. Da $L_c F$ ein abgeschlossener Unterraum von $C_c(F)$ ist, folgt:

6. Korollar: Jeder L_c-Raum ist vollständig und c-einbettbar.

Literaturverzeichnis

[1] E.Binz:"Kompakte Limesräume und Funktionenalgebren." Comm. Math. Helv. 43,2 (1968), pp. 195 - 203.

[2] H.-P. Butzmann:" Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$." Erscheint demnächst.

[3] C.H.Cook and H.R.Fischer: "On Equicontinuity and Continuous Convergence." Math.Ann. 159 (1965),pp. 94-104.

[4] K.Kutzler:"Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen." Erscheint 1972 im "Journal für die reine und angewandte Mathematik".

[5] A.P. Und W.J. Robertson:"Topologische Vektorräume" , Mannheim 1967 , Bibliographisches Institut .

[6] M.Schroder: "Continuous Convergence in a Gelfand Theory for Topologic al Algebras." Thesis, Queen´s University, Kingston, Ontario, Canada.