

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 119

**Worst-Case Analysen des
Ausfallrisikos eines Portfolios
aus marktabhängigen
Finanzderivaten**

von
JÖRN BARTH

Mannheim 2000

1.- 01/2000 - 50

Worst-Case Analysen des Ausfallrisikos eines Portfolios aus marktabhängigen Finanzderivaten

Jörn Barth*

21. Dezember 1999

*Graduiertenkolleg “Allokation auf Güter- und Finanzmärkten”, Universität Mannheim, L 13.15, D-68131 Mannheim, Germany. Tel: ++49 +621 181-3431, Fax: ++49 +89 2443-66361, E-mail: barth@econ.uni-mannheim.de. Ich danke Peter Albrecht, Milan Borkovec, Malte Cherdron, Darrell Duffie, Paul Embrechts, Christian Groh, Martin Hellwig, Claudia Klüppelberg und Marc Windfuhr für anregende Diskussionen.

Zusammenfassung

Diese Arbeit präsentiert einen systematischen Zugang zu der Worst-Case-Analyse des Kreditrisikos eines Portfolios aus Finanzderivaten wie Optionen und Swaps. Der wichtige Einfluß von Marktrisikofaktoren (wie z.B. des Zinsniveaus) auf das Kreditrisiko dieses Portfolios wird berücksichtigt. Durch die Verwendung von Risikomaßen, die gegenüber Value-at-Risk fortentwickelt wurden, kann das Kreditrisiko in außergewöhnlichen Marktsituationen präzise quantifiziert werden. Die neuartige Methodik wird in einer numerischen Studie angewandt und überprüft.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Modell MICR	4
3	Reaktionsverhalten	6
3.1	Modellierung	6
3.2	Empirische Schätzungen	8
4	Messung von Worst-Cases	10
4.1	Quantil-Maße	11
4.2	Andere Maße	16
5	Numerische Studie	18
5.1	Motivation	18
5.2	Spezifikation	19
5.3	Simulationen ohne Response	22
5.4	Simulationen mit Response	27
6	Zusammenfassung und Schlußfolgerung	33

1 Einführung

Die Krise der Finanzmärkte in Ostasien im Jahr 1997 und ihre drohende Ausdehnung auf andere Emerging Markets führte zu einer schweren Bewährungsprobe für das Risikomanagement vieler Finanzinstitutionen. Die Ausdehnung der Krise auf Rußland, das ein Zahlungsmoratorium im August 1998 verkündete, traf das Risikomanagement vieler Unternehmen unerwartet. Der spektakulärste Fall war die Beinahe-Insolvenz des Hedge-Funds Long-Term Capital Management (LTCM) im Herbst 1998 (vgl. Edwards (1999)). Aus Sicht eines der Gläubiger von LTCM wäre es zu einem Forderungsausfall gekommen, der auf die durch Rußland verursachte extreme Marktsituation zurückzuführen gewesen wäre, die die großen finanziellen Schwierigkeiten von LTCM ausgelöst hatte. Das Risikomanagement des Gläubigers muß daher den Einfluß potentiell ungünstiger Marktsituationen auf das Kreditrisiko der Schuldner (hier LTCM) berücksichtigen.

Im Falle von LTCM wird deutlich, daß selbst das Kreditrisiko eines Portfolios von einfachen Anleihen schwierig zu handhaben ist. Bislang gibt es keinen Standardzugang, aber mit CreditMetrics von J.P.Morgan (1997) und CreditRisk+ von CreditSuisse (1997) wurden zwei Methodiken präsentiert, die primär die Probleme bei der Bestimmung des Kreditrisikos eines aus Anleihen bestehenden Portfolios adressieren¹.

Wenn das Portfolio neben Anleihen jedoch auch Finanzkontrakte wie Optionen und Swaps enthält, deren Marktwert besonders stark von der Entwicklung der Finanzmärkte abhängig ist, vergrößern sich die Schwierigkeiten des Kreditrisikomanagements. Im Gegensatz zu Anleihen sind die Auszahlungen solcher Finanzkontrakte abhängig von der Entwicklung von Marktgrößen wie Aktienkursen, Zinssätzen und Wechselkursen, so daß das Kreditrisiko von der Entwicklung dieser Marktrisiken abhängig ist. Beispielsweise kann der Marktwert eines Zinsswaps je nach Zinsentwicklung einen positiven oder negativen Wert annehmen. Nur im Falle eines positiven Exposures kann eine Zahlung des Vertragspartners überhaupt durch dessen Insolvenz gefährdet sein.

Selbst wenn neben dem Einfluß der Entwicklung der Finanzmärkte auf das *Marktrisiko* der Finanzkontrakte auch das zeitlich variable *Kreditrisiko* des betreffenden Vertragspartners berücksichtigt wird, wird meistens angenommen, daß diese Risiken voneinander unabhängig sind. Jedoch ist diese Einteilung bei ausfallbedrohten marktabhängigen Finanzkontrakten nicht angebracht, im Gegenteil, es scheint eine direkte Verbindung zwischen den beiden "Risikokategorien" zu geben: Zum Beispiel kann ein Anstieg der Zinsen zur Zahlungsverweigerung oder -unfähigkeit eines Vertragspartners führen. Bei Rückgriff auf die Vermögenswerte des Schuldners könnte dann festgestellt werden, daß durch das hohe Zinsniveau der Wert dieser Vermögenswert stark reduziert ist (Hellwig (1994)). Selbst wenn in "normalen" Marktsituationen die Un-

¹ Weitere Modelle stellten McKinsey & Company ("CreditPortfolioView", vgl. Wilson (1997)) und KMV ("PortfolioManager") vor.

abhängigkeitsannahme gerechtfertigt sein sollte, in extremen Situationen ist der Zusammenbruch dieser Annahme nicht zu vermeiden. Allerdings wirft die Aufgabe der Unabhängigkeitsannahme weitreichende Probleme auf, da ein Zusammenhang zwischen Markt- und Kreditrisiken aus praktischer und theoretischer Sicht schwierig in das Risikomanagement zu integrieren ist.

In dieser Arbeit wird eine Methodik für das Risikomanagement eines Portfolio von ausfallgefährdeten marktabhängigen Finanzkontrakten vorgestellt, die den Einfluß von Marktgrößen auf das Kreditrisiko der Kontrahenten berücksichtigt, aber einige der Probleme vermeidet, die bei der Aufgabe der Unabhängigkeitsannahme entstehen. Dabei wird die Modellierung einer Korrelation zwischen Markt- und Kreditrisiken durch die Modellierung einer “einseitigen Abhängigkeit” umgangen. Die zentrale Frage, die mit Hilfe dieser Methodik beantwortet werden soll, lautet: Wie hoch ist das Kreditrisiko eines Portfolios, gegeben eine fixierte Marktsituation? Dieses Modell erlaubt somit eine Beeinflussung der Kreditrisiken durch die Marktrisiken, vernachlässigt aber den umgekehrten Einfluß. Aufgrund dieser Eigenschaft wurde dieses Modell mit MICR für “*Market-Influenced Credit Risk*” bezeichnet.

Das Ziel der MICR-Methodik ist die Berechnung des Eigenkapitals, das dieses Portfolio auch in extrem ungünstigen Marktsituationen absichern soll. Im Rahmen von MICR kann folgendes numerisches Vorgehen ausgeführt werden: Mittels Monte-Carlo Simulation werden viele verschiedene Marktszenarien generiert. Für jedes Marktszenario wird der Portfolioverlust bestimmt, der in dieser Situation erwartet wird. Um aus diesen Verlustdaten das Eigenkapital zu bestimmen, können verschiedene Risikomaße angewandt werden, deren Ziel auch die Erfassung des Risikos besonders schwerer Ausfälle beinhaltet. Durch die Anwendung solcher “Worst-Case-Verlustmaße” auf die Daten, die durch den Verlustprozeß generiert worden sind, soll eine systematische Methodik entwickelt werden, mit deren Hilfe man das notwendige Eigenkapital ermitteln kann, das auch in Streß-Situationen ausreichend ist. Dadurch können Streß-Tests des Eigenkapitals mittels ad-hoc gewählten Crash-Szenarien vermieden werden. Somit soll durch MICR eine Vereinheitlichung der Bestimmung des Eigenkapitals und der Ausführung von Streß-Tests erreicht werden.

Um die MICR-Methodik anzuwenden, wird das Eigenkapital für ein Portfolio, das nur aus Zinsswaps besteht, numerisch bestimmt. Die Ergebnisse zeigen, daß extreme Realisationen der Marktrisiken das Ausfallpotential des Portfolios stark ansteigen lassen können. Unter der Annahme der Unabhängigkeit von Markt- und Kreditrisiken fällt die Höhe der Verluste deutlich geringer aus. Dies ist ein Hinweis, daß gerade in extremen Marktsituationen das Ausfallpotential, das durch die Marktrisiken induziert wird, den entscheidenden Beitrag zum Kreditrisiko des Portfolios liefern kann. Jedoch sind dies gerade die Szenarien, für die das Risikomanagement benötigt wird.

In Abschnitt 2 wird das Modell MICR kurz vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Barth (2000), wo das Modell MICR auch ausführlich mit anderen Kreditrisikomodellen wie

CreditMetrics von J.P.Morgan (1997) und CreditRisk+ von CreditSuisse (1997) verglichen wird. In Abschnitt 3 wird die Response-Funktion modelliert, die die Beeinflussung der Kreditrisiken durch die Marktrisiken wiedergibt. In Abschnitt 4 werden die Verlustmaße diskutiert, die für die Worst-Case-Analyse geeignet sind. Schließlich wird in Abschnitt 5 die ausführliche numerische Studie zum Worst-Case-Verhalten eines Portfolios aus Zinsswaps beschrieben.

2 Modell MICR

Wir wollen ein Modell für die zeitliche Dynamik des Portfoliowertes einer Finanzinstitution FI entwerfen, in dem sowohl “Marktrisiken” als auch “Kreditrisiken” eine Rolle spielen. Das Ziel ist die Berechnung des Eigenkapitals, das Verluste decken soll, die unerwartet hoch ausfallen. Die Finanzinstitution FI kann beispielsweise eine Bank, eine Versicherung oder eine Investmentgesellschaft sein. Institutionelle Details der Abwicklung dieser Kontrakte finden in dieser Arbeit keine Beachtung.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Durch $\omega \in \Omega$ sind die möglichen “Zustände der Welt”, durch \mathcal{F} eine Filtration und durch P ein Wahrscheinlichkeitsmaß wiedergegeben. Wir betrachten einen vektorwertigen Diffusionsprozeß X der Dimension M auf (Ω, \mathcal{F}, P) . Der Prozeß X modelliert die *systematischen Risiken*, die vom Marktgeschehen gegeben sind. Wir bezeichnen die Komponenten von $X = (X_1, \dots, X_M)$ auch als *Marktrisiken* und denken an Aktienkurse, Wechselkurse und Zinssätze. Die Realisationen von $X = (X_1, \dots, X_M)$ bezeichnen wir durch $x = (x_1, \dots, x_M)$.

Aus der Sicht einer Finanzinstitution FI wird ein Portfolio von Finanzkontrakten mit einer festen Anzahl N von Vertragspartnern $a = 1, \dots, N$ im Zeitintervall $[0, T]$ betrachtet. Kredite bzw. Anleihen sind Beispiele für Finanzkontrakte, aber insbesondere sind Finanzderivate wie Optionen und Swaps adressiert. Die Abbildung $V_a^i : \mathcal{R}^M \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, (X(t), t) \mapsto V_a^i(X(t), t)$ gibt die Vorschrift, wie bei einer Realisation der Marktrisiken X zur Zeit t der Wert des Kontraktes $i = 1, \dots, K_a$ zu bestimmen ist, den FI mit Kontrahent a abgeschlossen hat, wobei K_a die Anzahl der Kontrakte mit a bezeichnet. Der Marktrisikenprozeß X , der die zeitliche Entwicklung des Wertes der Finanzkontrakte V_a^i im Zeitintervall $[0, T]$ beeinflusst, kann aus Sicht der Finanzinstitution FI als exogen aufgefaßt werden.

Neben den Gewinnen und Verlusten des Portfoliowertes, die der Finanzinstitution FI durch die Veränderungen der Marktrisiken X entstehen, können weitere Verluste durch Ausfälle der Kontrahenten auftreten. Wir modellieren das Ausfallverhalten des Kontrahenten a durch einen Poissonprozeß N_a mit Intensität λ_a . Ein Ausfall des Kontrahenten a zur Zeit $t = \tau$ wird durch einen Sprung von N_a bei τ dargestellt. Die Intensität $\lambda_a(X, t)$ des Poissonprozesses N_a soll von den Marktrisiken X abhängig sein, wobei die funktionale Form von $\lambda_a(X, t) = S_a(X, t)$ in Abschnitt 3 spezifiziert wird.

Wir nehmen an, daß im Falle eines Ausfalls von a der positive Teil des Nettowertes der Kontrakte

$$V_a^+ = \left(\sum_{i=1}^{K_a} V_a^i \right)^+ \quad (1)$$

mit Kontrahent a der Finanzinstitution vollständig verloren geht². Das Kreditrisiko des Portfolios wird somit einerseits durch das *Volumenrisiko* bestimmt, das durch den Nettowert des Exposures V_a^+ gegeben ist, und andererseits durch das *Ereignisrisiko*, das durch die Möglichkeit des Ausfalls eines Kontrahenten gegeben ist.

Wir setzen im folgenden das Volumenrisiko und das Ereignisrisiko zusammen, um den Portfolioverlust dL aufgrund von Kreditausfällen zu modellieren. Unter der Annahme, daß bei Eintreten des Ausfalls von Kontrahent a der Nettowert V_a für FI *vollständig* verloren geht, wird in Barth (2000) gezeigt, daß der *erwartete diskontierte Kreditverlust* des Portfolios, *gegeben* eine Konfiguration der Marktrisikofaktoren X zur Zeit t sich als

$$dL(t) = \frac{1}{B(0, t)} \sum_{a=1}^N V_a^+(X, t) S_a(X, t) dt \quad (2)$$

schreiben läßt, wobei $S_a(X, t)dt$ die Ausfallwahrscheinlichkeit von Kontrahent a in einem infinitesimalen Zeitintervall $[t, t + dt]$ darstellt. Durch die Multiplikation mit $1/B(0, t)$ wird der Gegenwart zur Zeit $t = 0$ eines Verlustes der Höhe $V_a^+(X(t), t)$ zur Zeit t ermittelt. $B(t_1, t_2)$ bezeichnet den Wert einer Geldeinheit zur Zeit t_2 , die zum Zeitpunkt $t_1 < t_2$ auf ein Konto deponiert wird, das zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_1, t_2]$ mit der aktuellen Zinsrate $r(t)$ verzinst wird:

$$B(t_1, t_2) = \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} r(s) ds \right]. \quad (3)$$

Der Zinssatz r bezeichnet den risikolosen Zinssatz.

Wenn der Portfolioverlust dL nicht mehr durch liquide Mittel gedeckt werden kann, muß das Eigenkapital V_0 der Finanzinstitution zur Deckung des Verlustes verwendet werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das notwendige Eigenkapital V_0 aus einem gegebenen Verlustprozeß dL zu bestimmen. Beispielsweise könnte V_0 durch

$$V_0 = \max_{t \in [0, T]} V_0(t) \quad (4)$$

mit dem kumulierten Verlust $\Delta L(X, t) = \int_t^{t+\Delta t} dL(X, t')$ und der Forderung

$$\text{Prob} \{ \Delta L(X, t) > V_0(t) \} = \alpha \quad (5)$$

bei einem Vertrauensniveau $1 \Leftrightarrow \alpha$ definiert werden. Es gibt weitere Möglichkeiten, das Eigenkapital V_0 zu definieren, die wir in Abschnitt 4 besprechen. Doch zuvor müssen wir die Möglichkeiten diskutieren, die Responsefunktion $S_a(X, t)$ zu modellieren.

² Wir verwenden die Notation $(\cdot)^+ = \max(0, \cdot)$.

3 Reaktionsverhalten

Das Kreditrisiko-Modell MICR berücksichtigt den Einfluß der Marktvariablen X auf die Ausfallintensität λ_a einzelner Kontrahenten a durch $S_a(X, t)$. Um S_a modellieren zu können, müssen wir die Marktrisiken X genauer spezifizieren. Wir spezialisieren uns auf den Geld- und Rentenmarkt. Wir sehen den Marktzinssatz r , der die kurzfristigen Einlagen im Geldmarktbereich betrifft, als einzige Marktvariable X an, die den Wert der Kontrakte und die Ausfallwahrscheinlichkeit der Kontrahenten beeinflusst. Sicherlich müßten in einem realistischen Risikomanagementmodell weitere Einflußgrößen (wie zum Beispiel Aktienkurse, Wechselkurse oder makroökonomische Größen wie das Bruttosozialprodukt) berücksichtigt werden. Das hier vorgestellte Modell stellt einen ersten Schritt zu einem realistischeren Modell dar, der sich auf den wichtigen Bereich des Zinsmanagements beschränkt.

3.1 Modellierung

Ob die Insolvenzwahrscheinlichkeit eines Unternehmens a' durch einen Zinsanstieg steigt oder sinkt, hängt ab von den Kontrakten, die es abgeschlossen hat³. Wenn a' eine kurzfristige Anlageform gewählt hat, ist es dem Reinvestitionsrisiko ausgesetzt: Für a' ist es vorteilhaft, wenn die Zinsen steigen, da bei der Reinvestition des kurzfristig angelegten Kapitals eine höhere Rendite erzielt werden kann. Fallen die Zinsen jedoch, dann ergibt die Reinvestition einen niedrigeren Ertrag. Die Funktion $S_{a'}$ sollte in diesem Fall fallend im Zinssatz r sein, da für höhere Zinsen eine niedrigere Ausfallwahrscheinlichkeit des Unternehmens a' folgt.

Als typischen Fall sehen wir jedoch ein Unternehmen a an, das langfristige Investitionen getätigt hat. Beispielsweise könnte a eine Bank sein, die langfristige Kredite gewährt hat, die kurzfristig refinanziert sind. Auf kurze Sicht ist der Wert dieser Kredite unsicher (Bewertungsrisiko): Wenn die Zinsen steigen, sinkt der Marktwert dieser Kredite. Ein unerwarteter starker Anstieg der kurzfristigen Zinsen kann dazu führen, daß die Refinanzierungskosten für diese Kredite die Rendite übersteigen, die a durch die langfristigen Kredite erhält. Der Marktwert der Kredite sinkt unter die Zurückzahlungsverpflichtung, die a gegenüber den Kapitalgebern eingegangen ist. Es besteht die Gefahr der Insolvenz von a , wenn a eine große Zahl solcher Kredite begeben hat. Steigende Zinsen führen in diesem Fall zu einer Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit von a , so daß S_a eine steigende Funktion sein sollte.

³ Aus der Sicht eines Unternehmens können die Zinsen als exogene Variable angesehen werden, vgl. Hellwig (1994). Wir setzen die Kontrakte, die das Unternehmen eingegangen ist, als fest gegeben voraus. Wir unterstellen weiterhin, daß ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Zinsen und der Ausfallwahrscheinlichkeit des Unternehmens existiert. Diese Unterstellung basiert auf der Annahme, daß die Änderung anderer (makro-)ökonomischer Größen, die sich zusammen mit den Zinsen ändern (vgl. Hellwig (1994)), keinen wesentlichen Einfluß auf die Ausfallwahrscheinlichkeit haben.

Aufbauend auf diesen Überlegungen schlagen wir folgende Eigenschaften vor, die die Response-Funktion S_a des langfristig engagierten und kurzfristig finanzierten Kontrahenten a qualitativ erfüllen sollte⁴. Die Ausfallintensität S_a soll eine steigende Funktion des Zinssatzes r sein. Für $r \rightarrow \infty$ nehmen wir an, daß $S_a(r) \rightarrow \infty$ gelten wird, da bei sehr hohen Zinsen die Refinanzierungskosten so hoch werden, daß eine Insolvenz von a nicht vermeidbar ist. Für $r \rightarrow 0$ soll das Ausfallrisiko $S_a(r)$ nur noch durch einen idiosynkratischen Beitrag c_a gegeben sein, der die vom Zinssatz unabhängigen Anteil der Ausfallintensität S_a angibt, d.h. $S_a(r) \rightarrow c_a$ für $r \rightarrow 0$. Die Response-Funktion $S_{a'}$ eines anderen Kontrahenten a' , der kurzfristig investiert hat, sollte für steigende Zinsen fallen.

Die einzige uns bekannte Untersuchung, in der eine funktionale Form für eine Response-Funktion explizit angenommen wird, wurde von Hull (1989) ausgeführt. Hull wählt einen exponentiellen Ansatz für S_a und benutzt eine zeitabhängige affine Funktion des zeitlich gemittelten Zinssatzes im Exponenten. Er merkt an, daß die genaue funktionale Form willkürlich gewählt ist. Im Gegensatz zu Hull (1989) nehmen wir an, daß die Ausfallintensität $S_a(r(t), t)$ nur von dem Wert des Zinssatzes r zur Zeit t abhängig ist. Damit berücksichtigen wir nicht, daß es zeitlich verzögerte Auswirkungen des Zinssatzes $r(t')$ für $t' < t$ auf $S_a(r(t), t)$ geben könnte. Diese schwerwiegende Annahme steht im Gegensatz zu Beobachtungen, daß sich Veränderungen der Zinsstruktur nur verzögert auf die Insolvenzwahrscheinlichkeiten auswirken. Zum Beispiel führte der starke Zinsanstieg am Ende der achtziger Jahre erst drei bis vier Jahre später zu finanziellen Schwierigkeiten der schweizerischen Regionalbanken (vgl. Staub (1998)). Jedoch zeigt der Fall des Hedge-Fonds LTCM, daß auch eine plötzlich auftretende extreme Situationen (in diesem Fall das russische Zahlungsmoratorium auf Staatsanleihen) eine sofortige Wirkung auf die Bonität eines Kontrahenten haben kann. Da wir uns auf die Untersuchung von “Worst-Cases” spezialisieren werden, halten wir die Annahme einer instantanen Auswirkung für tragbar. Wir sehen die Aufgabe dieser Annahme als eine Erweiterungsmöglichkeit der hier vorgestellten Arbeit an.

Wir modifizieren den Ansatz von Hull (1989) und erhalten⁵

$$S_a^e(r(t)) = S_a^e(r(0)) \exp[k_a(r(t) \Leftrightarrow r(0))], \quad (6)$$

mit einer kontrahentenspezifischen Konstante k_a und dem Startwert $S_a^e(r(0))$ für die FI bekannte Ausfallintensität $S_a^e(r(t))$. Wir nennen k_a den *Response-Koeffizienten*. Er stellt den einzigen Parameter dar, der bei der Annahme der Form Gl. (6) gewählt werden muß.

⁴ In Abschnitt 5 untersuchen wir numerisch ein Portfolio mit den Kontrahenten $a = 1, \dots, N$ aus Sicht der Finanzinstitution FI. Wir nehmen an, daß wir die Responsefunktion jedes Kontrahenten a in diesem Portfolio unabhängig von den Positionen wählen können, die zwischen a und FI bestehen. Somit vernachlässigen wir das finanzielle Risiko, das diese Positionen für die Bonität von a bedeuten. Mit anderen Worten, wir klammern das durch die Finanzkontrakte mit FI bei a induzierte Kreditrisiko aus. Dies ist äquivalent zu der Annahme, daß die Restpositionen von a die wichtigsten Einflußgrößen für die Bonität von a sind.

⁵ Eine Untersuchung anderer funktionaler Formen der Response-Funktionen findet sich in Barth (2000).

Bei der Wahl $k_a > 0$ wächst für steigende Zinsen die Ausfallintensität S_a^e . Für $r \rightarrow \infty$ gilt $S_a^e \rightarrow \infty$, für $r \rightarrow 0$ gilt $S_a^e \rightarrow c_a = S_a^e(r(0)) \exp[\Leftrightarrow k_a r(0)]$. Dieses Verhalten entspricht einem Kontrahenten, dessen finanzielle Situation von steigenden Zinsen geschwächt wird. Hull (1989) betrachtet ausschließlich den Fall $k_a \geq 0$ und argumentiert, daß eine Erhöhung des Zinssatzes die Liquidität des betrachteten Kontrahenten verringert und somit die Ausfallwahrscheinlichkeit erhöht. Für $k_a < 0$ kehrt sich dieses Verhalten um, so daß steigende Zinsen eine fallende Ausfallintensität zur Folge haben. Somit wird durch einen Response-Koeffizienten $k_a < 0$ ein Kontrahent spezifiziert, bei dem der Zuwachs der Vermögenswerte aufgrund des Zinsanstieges die finanzielle Situation festigt.

3.2 Empirische Schätzungen

Die Verwendung der Response-Funktion Gl.(6) setzt voraus, daß der Response-Koeffizient k_a bekannt ist. Wir beschreiben im folgenden die zur Verfügung stehenden Erkenntnisse, die zur Bestimmung von k_a verwendet werden können. Zuerst beschreiben wir empirische Untersuchungen des Zusammenhangs zwischen Zinsniveau und Ausfallwahrscheinlichkeit.

Longstaff und Schwartz (1995), Duffee (1996b) und Düllmann et al. (1999) untersuchen empirisch die Beziehung zwischen dem Corporate-Spread Y (der Renditedifferenz von Corporate Bonds gegenüber Staatsanleihen), der als Maß für das Ausfallrisiko des die Bonds emittierenden Unternehmens angenommen wird, und der aktuellen Marktzinsrate r . In allen drei Arbeiten wird die Korrelation zwischen Zinssatz r und Corporate-Spread Y durch eine Regression der Änderung des (absoluten) Spreads ΔY auf die Änderung des Zinssatzes Δr ermittelt. Longstaff und Schwartz (1995) und Duffee (1996b) betrachten den US-amerikanischen Anleihenmarkt, während Düllmann et al. (1999) den deutschen Rentenmarkt untersuchen. Duffee (1996b) und Düllmann et al. (1999) addieren eine Proxy-Variable für die Steigung der Zinsstrukturkurve.

Allerdings ist der Corporate-Spread Y nicht allein von der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeit des betrachteten Unternehmens bestimmt. Um den Corporate-Spread Y als Proxy-Variable für die Ausfallwahrscheinlichkeit anzusehen, müssen Liquiditätseinflüsse, Steuern und industriesektorspezifische Effekte eliminiert werden. Duffee (1996b) und Düllmann et al. (1999) sind sorgfältiger als Longstaff und Schwartz (1995) bei der Elimination anderer Determinanten.

Wir beschränken uns auf die Verwendung der Ergebnisse von Duffee (1996b). Duffee ermittelt einen signifikant negativen Regressionskoeffizienten b . Wir führen in Tabelle 1 nur die Ergebnisse des Koeffizienten der Untersuchung langfristiger Bonds auf. In Tabelle 1 wurden die über die Industriesektoren gemittelten Werte aufgelistet, die jeweils getrennt für verschiedene Industriesektoren bestimmt worden sind.

Die in Tabelle 1 wiedergegebenen Ergebnisse können wie folgt interpretiert werden: Bei einer Erhöhung von r um 100 Basispunkte wird der Spread Y *im Mittel* um $\Delta Y = b \times 100$ Basispunkte

Rating	Aaa	Aa	A	Baa
lang	-0.112	-0.155	-0.194	-0.338
mittel	-0.068	-0.117	-0.098	-0.172
kurz	-0.094	-0.077	-0.098	-0.192

Tabelle 1: *Ergebnisse von Duffee (1996b) für den Regressionskoeffizienten b . Die Schätzung bezieht sich auf Bonds mit lang-, mittel- und kurzfristiger Fälligkeit, gemittelt über verschiedene Industriesektoren. Der betrachtete Zeitraum ist die Periode von Januar 1985 bis März 1995.*

verringert. Eine Erhöhung des Zinssatzes hat damit eine Verringerung des Ausfallrisikos, das durch den Spread gemessen wird, zur Folge. Dieses Ergebnis konnte für ein Unternehmen a , das langfristige Anleihen emittiert hat, erwartet werden, da die Rendite des durch die Emission der Anleihen erhaltenen Kapitals bei wachsenden Zinsen steigt, die Höhe der zu leistenden Couponzahlungen jedoch konstant bleibt. Somit verbessert sich die finanzielle Situation von a . Ein Bewertungsrisiko besteht für a im umgekehrten Fall, wenn die Zinsen sinken sollten. Jedoch sollte sich die Situation für ein Unternehmen a' , das kurzfristige Anleihen begeben hat, bei steigenden Zinsen verschlechtern, da nach dem Ablauf der Fristigkeit der kurzfristigen Anleihen Kapital zu schlechteren Konditionen beschafft werden muß. Dieser Effekt spiegelt sich allerdings *nicht* in den empirischen Untersuchungen von Duffee (1996b) wieder: Für kurzfristige Anleihen ergibt sich auch ein negativer Koeffizient in Tabelle 1.

Jedoch können wir nicht unmittelbar von b auf k_a schließen, weil b sich auf *absolute* Änderungen des Zinssatzes der Bonds bezieht, während k_a sich auf *relative* Änderungen bezieht. Dies ist leicht ersichtlich, wenn wir die Änderung Δr in dem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ als klein ansehen und die exponentielle Response-Funktion Gl. (6) in faktorisierte Form darstellen und den Exponentialterm entwickeln:

$$\begin{aligned}
S_a(r(t + \Delta t), t + \Delta t) &= S_a(r(t), t) (1 + k_a \Delta r + \dots) \\
\Leftrightarrow \Delta S_a(r(t), t) &= 1 + k_a S_a(r(t), t) \Delta r + \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Durch die Form des Koeffizienten $k_a S_a$ bezieht sich k_a auf die relative Veränderung von ΔS_a .

Wir behaupten nun, daß für die Veränderung der Corporate-Spreads ΔY nur der Marktpreis des Ausfallrisikos verantwortlich ist (vgl. obige Diskussion und Duffee (1996b)). Wir identifizieren⁶ daher die Spreads ΔY und ΔS_a . Dies führt zu der Beziehung $k_a S_a(r(t), t) = b$. Wir nehmen an, daß a eine durchschnittliche Firma des entsprechenden Industriesektors darstellt. Wenn wir einen durchschnittlichen Wert für S_a wählen, können wir aus b eine grobe Schätzung

⁶ Wir sehen den Corporate-Spread als Proxy-Variable für die Ausfallwahrscheinlichkeit ΔS_a an. Durch diese Identifizierung $\Delta Y = \Delta S_a$ treffen wir implizit die Annahme, daß die Term-Struktur der Corporate-Spreads flach ist, da die Ausfallwahrscheinlichkeit ΔS_a nicht von einer Fälligkeit der Bonds abhängig ist. Diese Approximation ist gut für Bonds mit längeren Laufzeiten, vgl. Longstaff und Schwartz (1995).

von k_a angeben. Wir benutzen als typische Werte für S_a die Ausfallintensitäten, die in Fons (1994) für jede Ratingklasse von Moody's aufgeführt werden. Die Resultate sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Rating	Aaa	Aa	A	Baa
S_a (bp/Jahr)	7.3	9.1	19.6	49.6
b	-0.112	-0.155	-0.194	-0.338
k_a	-153	-170	-99	-69

Tabelle 2: Grobe Schätzungen des Response-Koeffizienten k_a , basierend auf den Ergebnissen für b für langfristige Anleihen der Untersuchung von Duffee (1996b) und den mittleren Ausfallraten pro Jahr (siehe Fons (1994), verwendet wurde die kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit in 10 Jahren, die auf ein Jahr umgerechnet wurde).

Wir werden in den numerischen Untersuchungen in Abschnitt 5 für k_a Werte verwenden, die in dem Intervall $[-32, 32]$ liegen. Der absolute Wert von k_a ist damit in allen Fällen niedriger als der von Duffee (1996b) geschätzte Wert. Diese vorsichtige Verwendung der Schätzung von Duffee (1996b) ist dadurch begründet, daß wir nicht nur einen linearen funktionalen Zusammenhang für die Response-Funktion S_a verwenden, sondern auch stärker ansteigende Funktionen wie die Exponentialfunktion. Die Annahme einer funktionalen Form, die nicht einer linearen Form entsprechen, kann auf Basis der verwendeten ökonometrischen Untersuchungen nicht gerechtfertigt werden. Da bei einem quadratischen oder exponentiellen funktionalen Zusammenhang eine Änderung Δr zu einer größeren Änderung ΔY führen kann, ist diese vorsichtige Verwendung der Schätzungen für k_a notwendig.

4 Messung von Worst-Cases

Wenn die Kontrakte und Konditionen des Portfolio der Finanzinstitution FI festgelegt sind, kann sich FI gegen Kreditausfälle nur durch die Unterlegung mit Eigenkapital schützen. Im Falle eines Verlustes durch den Ausfall eines Kontrahenten müssen nötigenfalls aus dem Eigenkapital Mittel entnommen werden, um den Verlust zu kompensieren. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit der eigene Zahlungsunfähigkeit verringert werden, die aufgrund der von Ausfällen verursachten Verluste eintreten könnte. Die Höhe des Eigenkapitals muß so beschaffen sein, daß ein Aufzehren des Eigenkapitals auch in ungünstigen Ausfallszenarien unwahrscheinlich ist.

Wir sehen die Berechnungsvorschrift für das Eigenkapital als ein Risikomaß an, das dem Ausfallpotential des Portfolios eine Maßzahl zuordnet. Es gibt vielfältige Möglichkeiten, ein solches Risikomaß zu definieren. Nicht nur das angestrebte Sicherheitsniveau spielt dabei eine Rolle, sondern auch die gewünschte Art der Vorsorge geht entscheidend ein. Wir diskutieren im fol-

genden verschiedene Risikomaße auf ihre Eignung, das notwendige Eigenkapital zu bestimmen, das auch in extremen Marktsituationen ausreichend ist. Wir nennen ein solches Maß daher ein Worst-Case-Risikomaß.

Den gemeinsamen Ausgangspunkt stellt der Verlustprozeß des Portfolios dar. Wie der Verlustprozeß modelliert wird, ist in diesem Abschnitt nicht entscheidend. Im Rahmen von MICR wurde Gl. (2) abgeleitet, was ein Beispiel einer Vorschrift darstellt, wie die Positionen verschiedener Kontrahenten zu einem (diskontierten) Kreditverlustprozeß dL zusammengefügt werden können. Im Modell MICR wird der Kreditverlustprozeß durch die Marktrisikofaktoren gesteuert. Somit beziehen sich die Verlustmaße auf die Marktrisiken, d.h. ein Worst-Case-Verlustmaß bezieht sich im Rahmen von MICR auf eine extreme Realisation der *Marktrisiken*, die für extreme Realisationen des Kreditverlustes verantwortlich sind. Jedoch stellt die Verwendung des Modells MICR keine notwendige Voraussetzung für die Anwendung der im folgenden entwickelten Verlustmaße dar.

4.1 Quantil-Maße

Wir diskutieren verschiedene Definitionen des Eigenkapitals, die sich aus Quantilen ableiten lassen. Wir wählen zwei dieser Maße aus, die für eine Worst-Case-Analyse geeignet erscheinen, wie sie in Abschnitt 5 ausgeführt wird. Anschließend werden qualitative Eigenschaften dieser beiden Maße untersucht.

Value-at-Risk Maß MQ: Die “klassische” Definition des Value-at-Risk basiert auf dem kumulierten Verlust⁷ $\int_0^T dL(s)$ im Zeitintervall $[0, T]$. Nach Vorgabe eines Sicherheitsniveaus $q \in [0, 1]$ wird das Eigenkapital $V_q^{\text{VaR}}[0, T]$ als die Kennzahl definiert, die der kumulierte Verlust nur mit Wahrscheinlichkeit $1 \Leftrightarrow q$ überschreitet⁸:

$$\text{Prob} \left[\int_0^T dL(s) > V_q^{\text{VaR}}[0, T] \right] = 1 \Leftrightarrow q. \quad (8)$$

In einer alternativen Interpretation kann $V_q^{\text{VaR}}[0, T]$ als diejenige Zahl angesehen werden, von der im Mittel erwartet werden kann, daß sie im Zeitraum $T/(1 \Leftrightarrow q)$ einmal überschritten wird. Für die typische Wahl $T = 10$ Tage und $q = 0.99$ kann somit erwartet werden, daß das Eigenkapital $V_{0.99}^{\text{VaR}}[0, 10d]$ in ungefähr vier (Handels-) Jahren einmal aufgezehrt sein wird.

⁷ Der Value-at-Risk für Marktrisiken wird meist auf die Profit-Loss-Verteilung bezogen, in der auch die Gewinne berücksichtigt sind. Im hier untersuchten Fall eines Value-at-Risks für Kreditrisiken ist jedoch nur der Bezug auf die Verluste sinnvoll.

⁸ Im Falle eines allgemeinen Prozesses X muß das Quantil X_q definiert werden durch die allgemeine Inversenbildung $V_q^X = \inf\{x | \text{Prob}[X > x] \geq 1 - q\}$. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Verlustprozeß dL die einfachere Definition Gl. (8) des Quantils zuläßt.

Der kumulative Value-at-Risk $V_q^{\text{VaR}}[0, T]$ wird gewöhnlich benutzt, um Marktrisiken über einen kurzen Zeitraum (typisch sind zehn Tage, die in dem Basler Abkommen zur Bankenregulierung, vgl. Basle (1996), gefordert werden) einzuschätzen. Allerdings müssen Kreditrisiken über längere Zeiträume betrachtet werden, die sich beispielsweise über zehn *Jahre* erstrecken können. In einem Zeitraum dieser Länge kann nach einem Kreditausfall, dessen Deckung einen Teil des Eigenkapitals benötigte, das Eigenkapital wieder aufgefüllt werden. Die Verwendung des kumulativen Value-at-Risk Gl. (8) ist somit bei Kreditrisiken im Gegensatz zu Marktrisiken nicht mehr sinnvoll, da die Kreditrisiken über einen viel längeren Zeitraum verfolgt werden müssen. Statt den Verlust dL über das ganze Zeitintervall $[0, T]$ zu kumulieren, könnte man auch den Value-at-Risk über ein kürzeres Zeitintervall $[t, t + \Delta t] \subset [0, T]$ mit $\Delta t > 0$ definieren durch

$$\text{Prob} \left[\int_t^{t+\Delta t} dL(s) > V_q^{\text{VaR}}[t, t + \Delta t] \right] = 1 \Leftrightarrow q. \quad (9)$$

Allerdings würde Δt eine weitere (firmenspezifische) Variable darstellen, die exogen vorgegeben und geschätzt werden muß. Um dieses Problem zu umgehen, approximieren wir Δt durch die infinitesimale Zeiteinheit dt . In dieser Approximation definieren wir das Eigenkapital $V_q^{\text{Q}}[t]$ durch⁹

$$\text{Prob} [dL(t) > V_q^{\text{Q}}[t]] \leq 1 \Leftrightarrow q, \quad (10)$$

wobei $V_q^{\text{Q}}[t]$ das q -Quantil der Verlustverteilung zur Zeit t darstellt. Das Quantil $V_q^{\text{Q}}[t]$ stellt eine obere Schranke für die Verluste zur Zeit t dar, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit $1 \Leftrightarrow q$ überschritten wird. In einer praktischen Implementierung, die notwendigerweise diskrete Zeit unterstellt, müssen wir anstelle von dt von einem endlichen Zeitintervall Δt ausgehen. Wir werden in Kapitel 5 $\Delta t = 1$ Monat wählen.

Wenn wir das Eigenkapital $V_q^{\text{Q}}[t]$ mittels Gl. (10) definieren, müssen wir eine Aussage treffen, an welchem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Finanzinstitution FI den Wert $V_q^{\text{Q}}[t]$ auswerten soll. Um über das gesamte Zeitintervall $[0, T]$ mit einer Wahrscheinlichkeit q sicher zu sein, müssen wir das Eigenkapital $V_q^{\text{MQ}}[0, T]$ durch

$$V_q^{\text{MQ}}[0, T] = \max_{t \in [0, T]} V_q^{\text{Q}}[t] \quad (11)$$

wählen¹⁰. Wir bezeichnen $V_q^{\text{MQ}}[0, T]$ als den Spitzenverlust (“peak loss”, vgl. Duffee (1996a)). Der Spitzenverlust $V_q^{\text{MQ}}[0, T]$ kann mit Hilfe der Monte-Carlo Simulationstechnik numerisch ermittelt werden.

⁹ In Barth (2000) wird gezeigt, daß Gl. (9) wohldefiniert ist.

¹⁰ Wir gehen davon aus, daß das Eigenkapital eine konstante Größe auf $[0, T]$ sein soll. Wenn wir eine zeitliche Variation des Eigenkapitals erlauben würden, könnten wir zu jeder Zeit $t \in [0, T]$ fordern, daß $V_q^{\text{Q}}[t]$ als Eigenkapital unterlegt sein soll, was eine kontinuierliche Anpassung des Eigenkapitals in $[0, T]$ erfordert. Wir untersuchen diesen Fall nicht, da uns der Worst Case im Zeitraum $[0, T]$ interessiert.

Natürlich führt $V_q^{\text{MQ}}[0, T]$ zu größeren Eigenkapitalanforderungen als ein zeitliches Mittel über $V_q^{\text{Q}}[t]$ für $t \in [0, T]$, das einen Durchschnittsverlust ergibt (vgl. Abschnitt 4.2). Aber im Gegensatz zu dem Durchschnittsverlust könnte V_q^{MQ} ein Maß sein, das empfindlich auf seltene Ausfallereignisse reagiert. Wir sehen V_q^{MQ} als Worst-Case-Maß an und untersuchen quantitative Eigenschaften dieses Maßes in Kapitel 5. Ein Worst-Case-Maß wie V_q^{MQ} muß nicht nur in Verbindung mit Eigenkapitalanforderungen gesehen werden, sondern auch im Kontext von Streß-Tests, die Eigenkapitalanforderungen in solchen Worst Cases überprüfen sollen.

Worst-Case Maß QM: Das Verlustmaß V_q^{MQ} stellt nicht die einzige Möglichkeit dar, ein quantilbasiertes Maß für das notwendige Eigenkapitals zu definieren. Wir können ebenso eine grundsätzlich andere Art der Zeitauswertung vornehmen. Statt zu jedem Zeitpunkt das Quantil der marginalen Verteilung des Prozesses zu berechnen und dann das Maximum dieser Quantile zu betrachten, können wir den maximalen Verlust *jeder Realisation* des Verlustpfades $dL(t)$ auf $t \in [0, T]$ untersuchen (Albrecht (1998)). Wir betrachten die Verteilung des pfadweisen Maximums des Verlustprozesses und bilden das Quantil dieser Verteilung:

$$\begin{aligned} & \text{Prob} [dL(t) > V_q^{\text{QM}}[0, T] \text{ für ein } t \in [0, T]] \leq 1 \Leftrightarrow q \\ \Leftrightarrow & \text{Prob} \left[\max_{t \in [0, T]} dL(t) > V_q^{\text{QM}}[0, T] \right] \leq 1 \Leftrightarrow q. \end{aligned} \quad (12)$$

Auf einem Sicherheitsniveau q sollte der Verlust dL für jede Realisation nicht größer sein als V_q^{QM} . Dieser ruinthoretische Zugang zum Eigenkapital wurde bislang im Kontext des Risikomanagements im Finanzmarktbereich nicht verfolgt.

Ebenso wie V_q^{MQ} sehen wir V_q^{QM} als ein Worst-Case-Maß an, da es sich durch die Maximumsbildung auf ein schlechtestes Ereignis bezieht. Der grundlegende Unterschied zwischen V_q^{MQ} und V_q^{QM} ist das Subjekt, auf das sich das Attribut “schlechteste” bezieht: Im Falle von V_q^{MQ} erstreckt sich die Maximumsbildung über die Quantile der Marginalverteilungen im Zeitraum $[0, T]$. Dem gegenüber bezieht sich die Maximumsbildung von V_q^{QM} auf die einzelnen Pfade der Realisationen des Verlustprozesses.

Grob gesprochen sind die Maximumsbildung und die Quantilberechnung beim ruinthoretischen Zugang Gl. (12) gegenüber dem Spitzenverlust (Gl. (10) und Gl. (11)) vertauscht. Dies ist der Grund für die Bezeichnungen V_q^{QM} und V_q^{MQ} , die wir im folgenden durch QM und MQ abkürzen. Da unterschiedliche mathematische Objekte adressiert sind, muß der unterschiedliche Charakter der Maximumsbildung und der Quantilberechnung beachtet werden. Wir diskutieren und interpretieren die unterschiedlichen Eigenschaften von MQ und QM im folgenden Abschnitt.

Eigenschaften von MQ und QM: Durch die Maße MQ und QM haben wir zwei Worst-Case-Maße definiert. Wir untersuchen in diesem Abschnitt die qualitativen Eigenschaften dieser

beiden Maße. Eine quantitative Untersuchung mit ökonomischer Interpretation können wir erst in der numerischen Untersuchung in Abschnitt 5 durchführen.

Die Hauptschwierigkeit beim Umgang mit QM besteht in den Schwierigkeiten, die Maximumverteilung eines stochastischen Prozesses zu ermitteln. Nur im Falle des Wiener-Prozesses existiert ein analytisches Ergebnis, vgl. z.B. Karatzas und Shreve (1988). Aber auch numerisch ist die Maximumverteilung nicht einfach zu bestimmen, da eine hohe zeitliche Auflösung der Diskretisierung des stochastischen Prozesses erforderlich ist.

Eine hohe zeitliche Auflösung ist auch bei der Bestimmung des Maßes MQ erforderlich. Diese Anforderungen stehen im Gegensatz zu der im Kreditrisikomanagement üblichen Praxis (siehe z.B. J.P.Morgan (1997)), den Kreditverlust nur in jährlichen Intervallen zu betrachten. Um MQ zu bestimmen, müssen wir die marginalen Verlustverteilungen an viel mehr Zeitpunkten auswerten. In Barth (2000) wird die minimale zeitliche Auflösung charakterisiert, die notwendig ist, um im Rahmen der möglichen Rechengenauigkeit die Maße MQ und QM numerisch genau zu bestimmen.

Ohne exakte mathematische Beweise zu geben, diskutieren wir heuristisch im folgenden einige qualitative Eigenschaften von V_q^{QM} und V_q^{MQ} :

- (i) Das Quantil der Verteilung des pfadweisen Maximums V_q^{QM} ist größer als das Maximum der Quantile V_q^{MQ} : Im Falle von V_q^{MQ} ist das q -Quantil bestimmt durch die Werte des Verlustprozesses zu einer *festen* Zeit, bei der der Quantilwert maximal ist. Die Wahrscheinlichkeitsmasse q bezieht sich auf eine marginale Verteilung. Dem gegenüber bezieht sich die Masse q im Falle des Maßes V_q^{QM} auf die Verteilung des pfadweisen Maximums im gesamten Zeitintervall $[0, T]$. Jede Ziehung aus der Maximumverteilung stellt ein Maximum des Prozesses dar, während eine Ziehung aus der marginalen Verteilung in der Regel kein Prozeßmaximum darstellt, auch wenn die marginale Verteilung mit dem größten Quantilwert ausgewertet wird.
- (ii) Aus demselben heuristischen Argument von Punkt (i) folgt, daß

$$V_q^{\text{QM}}[0, T] \geq \max \{V_q^{\text{QM}}[0, t], V_q^{\text{QM}}[t, T]\} \quad (13)$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt¹¹.

- (iii) Um das Maß $V_q^{\text{MQ}}[0, T]$ zu bestimmen, müssen wir alle Quantile $V_q^{\text{Q}}[t]$ der marginalen Verteilungen zu allen Zeiten $t \in [0, T]$ berechnen. Dies hat den Vorteil, daß das Maß $V_q^{\text{MQ}}[t_1, t_2]$ auf einem kleineren Intervall $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ ohne numerischen Mehraufwand

¹¹ Die Notation ist nicht präzise, da die explizite Notation einer Konditionierung auf den Startwert des Prozesses fehlt, auf den sich $V_q^{\text{QM}}[t, T]$ bezieht. Das Argument ist jedoch sowohl gültig, wenn $V_q^{\text{QM}}[t, T]$ auf einen Wert von $dL(t)$ konditioniert ist als auch wenn $V_q^{\text{QM}}[t, T]$ ohne Konditionierung betrachtet wird.

berechnet werden kann, indem einfach das Intervall eingeschränkt wird, aus dem das Maximum über die Quantile bestimmt wird. Dies ist nicht möglich im Falle des Maßes V_q^{QM} , da nur die Maximumverteilung eingeht, die keine Informationen darüber enthält, wann ein pfadweises Maximum angenommen wurde. Mit anderen Worten, aus der Maximumverteilung des Prozesses auf $[0, T]$ kann nicht die Maximumverteilung desselben Prozesses auf $[t_1, t_2]$ abgeleitet werden. Eine neue Monte-Carlo Simulation wird dafür benötigt.

- (iv) Der letzte Punkt (iii) stellt klar, daß es nicht möglich ist, aus dem Maß V_q^{QM} einen kumulativen Verlust oder eine obere Grenze für den kumulativen Verlust auf einem gegebenen Intervall $[t, t + \Delta t]$ abzuleiten. Im Falle des Maßes V_q^{MQ} kann dies leicht ausgeführt werden, in dem man über die Quantile V_q^{Q} integriert.
- (v) Eine triviale Beziehung zwischen V_q^{QM} und V_q^{MQ} kann durch die Betrachtung infinitesimal langer “Pfade” gewonnen werden:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_q^{\text{QM}}[t, t + \Delta t] = V_q^{\text{Q}}[t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_q^{\text{MQ}}[t, t + \Delta t]. \quad (14)$$

Die Maße MQ und QM stimmen in diesem Limes überein.

- (vi) Das pfadweise Maximum ist subadditiv¹², d.h. für zwei Prozesse X und Y gilt

$$\max_{t \in [0, T]} (X(t) + Y(t)) \leq \max_{t \in [0, T]} X(t) + \max_{t \in [0, T]} Y(t), \quad (15)$$

weil die Maxima der einzelnen Prozesse X und Y zu unterschiedlichen Zeiten angenommen werden können. Allerdings überträgt sich diese Eigenschaft nicht auf das Quantil der Verteilung des pfadweisen Maximums V_q^{QM} , weil die Quantilbildung die Subadditivität nicht unterstützt. Das Maß QM ist daher nicht *kohärent*, vgl. Artzner et al. (1997).

- (vii) Im Spezialfall einer konstanten Ausfallintensität kann für “übliche” Verlustmaße der Verlust als Produkt eines Exposuremaßes mit der kumulativen Ausfallwahrscheinlichkeit in dem betrachteten Zeitintervall ausgedrückt werden. Dies ist für QM und MQ im allgemeinen nicht möglich.

Wir erhalten aufgrund dieser Beobachtungen keinen Hinweis, ob das Maß QM sensitiver auf extreme Realisationen des Verlustprozesses reagiert als MQ, d.h. das QM gegenüber MQ unterschiedlich starke Belegungen der Verteilungsenden zuverlässiger und genauer mißt. Eine größere “Empfindlichkeit” in Bezug auf Worst Cases kann zu konservativeren Eigenkapitalforderungen führen. Wir überprüfen die Sensitivität der Maße QM und MQ numerisch in Abschnitt 5.

¹² Das pfadweise Maximum konstituiert eine Norm auf dem Raum der möglichen Pfadrealisationen.

4.2 Andere Maße

Wir betrachteten im letzten Abschnitt das Quantil als spezielles Funktional, das der Definition der Verlustmaße MQ und QM zu Grunde lag. Wir stellen in diesem Abschnitt Maße vor, die nicht auf der Verwendung von Quantilen beruhen. Diese Maße sollen ebenfalls für eine Worst Case Analyse geeignet sein. Dazu diskutieren wir andere Funktionale F (z.B. den Erwartungswert), die analog zu der Behandlung der Quantile auf die marginalen Verteilungen oder die Maximumverteilung angewendet werden können.

Wie im Falle des Quantils gibt es auch bei der Betrachtung eines allgemeinen Funktionals F zwei Mechanismen, mit denen man die Worst Case Eigenschaft implementieren kann, wenn man einen kumulativen Zugang (analog zu Gl. (8)) ausschließt. Die beiden Mechanismen unterscheiden sich in der Art der Zeitaggregation bzw. der Maximumsbildung: Die erste Möglichkeit besteht in der Betrachtung der marginalen Verteilungen des Verlustprozesses $dL(t)$ zu allen Zeiten $t \in [0, T]$. Wir wenden das Funktional F jeweils auf die marginale Verteilung zu jeder Zeit $t \in [0, T]$ an und wählen aus den ermittelten Werten das zeitliche Maximum aus. Die zweite Möglichkeit resultiert aus der Anwendung des Funktionals F auf die Maximumverteilung des Verlustprozesses.

Im letzten Abschnitt wählten wir das Quantil als Funktional. Das Quantil V_q^Q bezieht sich auf den kleinen Teil $1 \Leftrightarrow q$ der Wahrscheinlichkeitsmasse, die die schwach besetzten Außenbereiche der Verteilung bestimmt. Da die Außenbereiche der Verteilungsfunktion die Höhe und Wahrscheinlichkeiten der gefährlichen Verluste bestimmen, kann das Quantil Anhaltspunkte über die Gefahr ungünstiger Realisierungen geben. Andere Funktionale wie der Erwartungswert oder die Varianz beziehen sich auf den (in der Regel) stark besetzten Mittelteil der Verteilung und sind daher als Maße für die seltenen Ereignisse in den “Tails” der Verteilung nicht geeignet. Auch wenn die Kurtosis Hinweise geben kann, daß die Verteilungsenden gegenüber der Normalverteilung stärker belegt sind, arbeitet dieses Maß nicht zuverlässig bei der Messung gefährlicher Tails (vgl. Embrechts et al. (1997)).

Erwartungswert-Maß EM: Wir führen in den numerischen Untersuchungen in Kapitel 5 zusätzlich zu den Maßen MQ und QM ein Erwartungswert-Maß auf, um die Worst-Case-Maße an einem konventionellen Risikomaß als Referenz messen zu können. Wir wählen das Maß “EM”, daß durch

$$V^{\text{EM}}[0, T] = \max_{t \in [0, T]} E[dL(t)] \quad (16)$$

definiert ist. Dieses Maß nimmt Bezug zu der Frage: Wie hoch kann der höchste erwartete Verlust für ein $t \in [0, T]$ ausfallen? Der erwartete Verlust spielt eine wichtige Rolle im Risikomanagement, obwohl der erwartete Verlust keinen Anhaltspunkt über die Wahrscheinlichkeit und Höhe außergewöhnlicher Verluste gibt, da der Erwartungswert primär durch den zentralen Teil der Verlustverteilung und nicht durch die Tails gegeben ist.

Shortfall-Maß TCE: Wir diskutieren ein Shortfall-Maß als letztes Beispiel für ein Funktional. Das Shortfall-Maß verwendet einen Erwartungswert, der sich durch eine Konditionierung nur auf den Außenbereich der (marginalen oder Maximums-) Verteilung bezieht. Dieses Shortfall-Maß bezeichnen wir durch “TCE” (Tail Conditional Expectation, vgl. Embrechts et al. (1997)). Wir untersuchen den Fall, bei dem wir das Shortfall-Maß auf die marginalen Verteilungen anwenden und anschließend das Maximum über $t \in [0, T]$ bilden:

$$V_q^{\text{TCE}}[0, T] = \max_{t \in [0, T]} E [dL(t) | dL(t) > V_q^{\text{Q}}[t]]. \quad (17)$$

Wir wenden das TCE-Maß nicht auf die Maximumverteilung an. Zu einem vorgegebenen Sicherheitsniveau q stellt in Gl. (17) das Quantil $V_q^{\text{Q}}[t]$ der marginalen Verteilung des Verlustprozesses dL die obere Grenze dar, bis zu der Verluste als “normal” bezeichnet werden. Alle Verluste, die größer als $V_q^{\text{Q}}[t]$ sind, werden als außergewöhnliche schwere Verluste angesehen. Das TCE-Maß bildet den Erwartungswert nur über diese schweren Verluste.

Die Wahl der oberen Grenze als Quantil kann durch andere Definitionen ersetzt werden. Jedoch ergänzt das TCE-Maß mit einem Quantilwert $V_q^{\text{Q}}[t]$ als oberer Schranke in sinnvoller Weise den (im Risikomanagement oft verwendeten) Value-at-Risk-Zugang, der hier durch das Maß MQ modifiziert wiedergegeben ist: Das TCE-Maß gibt an, wie schwer ein Verlust ausfallen kann, wenn er eine vorgegebene Schranke überschritten hat. Diese für das Risikomanagement wichtige Information kann durch ein quantilbasiertes Value-at-Risk Maß nicht erhalten werden. Das TCE-Maß kann somit als Synthese zwischen dem rein quantilbasierten Value-at-Risk Zugang und dem Erwartungswert-Maß angesehen werden.

Aufgrund dieser Eigenschaft stellt das TCE-Maß ein Worst-Case-Maß dar, das sensitiv die Verteilungsenden messen kann. Man kann mit Hilfe des TCE-Maßes für ein festes t die Mean-Excess-Funktion (vgl. Embrechts et al. (1997)) $q \rightarrow V_q^{\text{TCE}}[t] \Leftrightarrow V_q^{\text{Q}}[t]$ definieren, die alle für eine Untersuchung der Verteilungsenden notwendigen Informationen enthält. Wir werden die Mean-Excess-Funktion nicht weiter diskutieren, da wir uns auf einen festen Wert für q konzentrieren.

Artzner et al. (1997) zeigen, daß quantilbasierte Maße (wie das konventionelle Value-at-Risk Maß, aber auch QM und MQ) nicht *kohärent* sind, d.h. im wesentlichen, daß sie eine Subadditivitätseigenschaft verletzen: Es kann im Falle der Quantilmaße QM und MQ möglich sein, durch die getrennte Verbuchung von Subportfolios eine kleinere Eigenkapitalforderung zu erhalten als bei der Betrachtung des Portfolios als Ganzes. Dagegen kann gezeigt werden, daß das Shortfall-Maß TCE ein kohärentes Maß bildet. Artzner et al. (1997) zeigen weiterhin, daß TCE das Maß mit der kleinsten Eigenkapitalforderung ist, das auch kohärent ist. Somit erscheint das Shortfall-Maß TCE besonders für das Risikomanagement geeignet.

Allerdings verwendet die Definition des quantilbasierten Maßes QM das pfadweise Maximum. Wie wir in Abschnitt 4.1 bemerkt haben, stellt das pfadweise Maximum eine Norm dar, so daß die Subadditivitätseigenschaft folgt. Analytisch können wir nicht überprüfen, ob durch

die Verknüpfung des nicht-subadditiven Quantils mit der subadditiven Maximumsbildung ein Maß folgt, das subadditiv ist. Wir erwarten jedoch keine Subadditivität des Maßes QM und bestätigen dies durch numerisch ausgewertete Beispiele in Abschnitt 5, in dem die Maße QM, MQ, EM und TCE eingehend verglichen werden.

5 Numerische Studie

Auf Basis des Modells MICR und der Response-Funktionen für die Ausfallintensität S_a wenden wir in diesem Kapitel die Worst-Case Risikomaße an, um das Ausfallpotential eines Portfolios aus Zinsswap-Kontrakten numerisch zu untersuchen.

5.1 Motivation

Wir untersuchen in diesem Kapitel ein Portfolio, das nur aus Zinsswaps besteht. Warum betrachten wir Zinsswaps und keine anderen Finanzkontrakte? Zinsswaps bilden eines der wichtigsten Finanzderivate, die im unregulierten Freiverkehr (OTC) gehandelt werden. Das Zinsmanagement basiert zu einem großen Teil auf der Verwendung von Swap-Kontrakten. Daher ist ein effizientes Kreditrisikomanagement dieser Kontrakte erforderlich.

Weiterhin wählen wir Zinsswaps, weil die Bestimmung des Kreditrisikos eines Zinsswaps aus drei Gründen repräsentativ ist für weitere derivative Finanzkontrakte: Erstens ist der Markto-Market-Wert eines Zinsswaps von der Entwicklung von Marktvariablen (hier des Zinssatzes) abhängig. Zweitens bestehen nur Forderungen auf die Zinsen des Nominalbetrages, so daß der alleinige Bezug des Eigenkapitals auf den Nominalwert nicht sinnvoll ist. Drittens kann der Wert des Zinsswaps positive und negative Werte annehmen: Bei Vertragsabschluß eines Swaps, der zu Beginn der Laufzeit den Wert Null haben soll ("zu par"), ist nicht bekannt, welche Seite gegenüber dem Ausfall der anderen Seite exponiert sein wird. Da ein Portfolio aus Zinsswaps alle wesentlichen Eigenschaften eines realistischen Portfolios aus Zinsderivaten beinhaltet, ist die Berücksichtigung anderer Zinsderivate für eine exemplarische Studie des Modells MICR nicht nötig.

Wir nehmen an, daß sich alle Zinsswaps des Portfolios auf einem Zinssatz r beziehen. Durch diese Annahme berücksichtigen wir nicht, daß es verschiedene Risiko- bzw. Bonitätsklassen gibt, die unterschiedliche Risikoaufschläge erfordern. Man kann sich unter r den Marktzins auf eine sichere Anleihe mit unendlicher Laufzeit vorstellen. Diese Interpretation ist jedoch nicht notwendig, da im vorliegenden Kontext durch $r(t)$ der zur Zeit t zu zahlenden Zins $r(t)$ der paying-float Seite der Zinsswaps definiert ist.

Ein Zinsswap ist ein Beispiel für einen Kontrakt, bei denen der Kontrahent oft dann ausfällt, wenn der Kontrakt für die betrachtete Finanzinstitution FI einen großen Wert darstellt. Da-

mit ist die Verwendung des Modells MICR sinnvoll, das diese Reagibilität der Ausfallwahrscheinlichkeit des Kontrahenten auf den Zinssatz durch die Modellierung der Response-Funktion berücksichtigt.

Ist die Betrachtung eines Zinssatzes als einzigem Marktrisikofaktor zu speziell? Wir können das Portfolio aus Zinsderivaten als Bestandteil eines größeren Portfolios ansehen, dessen Positionen wir nicht betrachten. Wir beschränken uns somit auf die Beobachtung eines Subportfolios und zeigen, welche Schäden durch das Kreditrisiko dieses Subportfolios verursacht werden können. Wir betrachten die Zinsswaps, die das Subportfolio bilden, somit nicht als Hedge-Instrumente, die andere Positionen des Portfolios absichern sollen.

Wir verfolgen durch die numerische Implementierung des Swap-Portfolios verschiedene Ziele:

- Welches Eigenkapital resultiert aus der Anwendung der Risikomaße QM, MQ und TCE? Welches Maß reagiert am sensitivsten auf das Vorhandensein stark belegter Außenbereiche der Verlustverteilung?
- Welches Eigenkapital muß für einen Kontrakt zurückgehalten werden, der zu einem schon bestehenden Portfolio hinzugenommen wird? Mit anderen Worten, um welchen Betrag muß das Eigenkapital für das Portfolio ergänzt werden? Ist das hinzuzufügende Eigenkapital für den zusätzlichen Kontrakt größer oder kleiner als das Eigenkapital, das benötigt wird, wenn der Kontrakt isoliert betrachtet wird? Wie hängt in dieser Situation die Höhe des zusätzlichen Eigenkapitals ab von der Anzahl der schon bestehenden Kontrakte und der Anzahl der Kontrahenten? Spielt die Subadditivität der Risikomaße eine Rolle?
- Wie wichtig ist die Berücksichtigung der Reagibilität der Ausfallwahrscheinlichkeit auf den Zinssatz durch das zugrundeliegende Modell MICR?

Bevor wir diese Fragestellungen untersuchen, besprechen wir im nächsten Abschnitt die Spezifikation der der Simulation zugrundeliegenden Modelle.

5.2 Spezifikation

Zinsstrukturmodell: Wir wählen als Zinsstrukturmodell, das die Dynamik des Zinssatzes r beschreiben soll, das Cox-Ingersoll-Ross Modell (“CIR”, siehe Cox et al. (1985a) und Cox et al. (1985b)). Dieses Modell ist durch die folgende stochastische Differentialgleichung charakterisiert mit den Konstanten σ (Volatilitätsparameter), θ (“Pullback“-Niveau) und κ (“Pullback“-Konstante):

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad (18)$$

Dabei stellt W den Standard-Wiener-Prozeß dar.

Wir verwenden die Schätzung der Parameter κ , θ und σ von Duffee (1996a), die sich auf US-amerikanische Treasury-Bills im Zeitraum von 1959 bis 1992 stützen. Es resultierten folgende Werte: $\kappa = 0.268$, $\theta = 0.063$ und $\sigma = 0.082$. Ein weiterer Parameter λ (der “Marktpreis des Risikos”), der im Modell von Cox et al. (1985b) notwendig ist, um das Modell vollständig zu spezifizieren und eine Bewertungsformel für die Zero-Bonds zu erreichen, wird von Duffee (1996a) auf Null gesetzt. Wir verwenden durchgehend als Startwert das langfristige mittlere Zinsniveau $r(0) = \theta$. Wir legen der Untersuchung des Swap-Portfolios eine Zeitperiode von $T = 8$ Jahren zugrunde, wobei die Startzeit als $t = 0$ definiert wird.

Verwendete Swaps: Wir beschränken uns auf vier verschiedene Swaps, deren Charakteristiken in Tabelle 3 zusammengefaßt sind. Die halbjährlichen Zahlungen erfolgen für alle Swaps zu denselben Zeitpunkten. Der Nominalwert der Swaps ist auf 1 normiert. Das Portfolio besteht aus Positionen, die ein ganzzahliges Vielfaches dieser Kontrakte darstellen. Die Par-Rate ist die Swap-Rate \bar{r} , die als derjenige Zinssatz definiert ist, den die Zahlungen der paying-fixed Seite haben müssen, wenn der Swap zu Beginn der Laufzeit $t = 0$ den Wert Null haben soll. Wir modellieren Swap-Kontrakte, die schon vor dem Zeitpunkt $t = 0$ abgeschlossen worden sind, durch einen willkürlich gewählten Offset der Par-Rate, so daß diese Swaps bei $t = 0$ nicht den Wert Null haben.

Swap	Par Rate	Offset	Fälligk.	Nom.	Zahl.Per.
# 1	6.35%	+0.5%	4 Jahre	1	halbjähr.
# 2	6.32%	0	6 Jahre	1	halbjähr.
# 3	6.29%	⇐0.4%	8 Jahre	1	halbjähr.
# 4	6.36%	+0.2%	3 Jahre	1	halbjähr.

Tabelle 3: Spezifikation der Zinsswaps, die in den numerischen Simulation des Portfolios benutzt werden.

Wir nehmen an, daß der Wert des Swaps nicht von der Bonitätseinstufung des betrachteten Kontrahenten und der Finanzinstitution FI abhängt. Da bei einem Zinsswap der Nominalbetrag nicht ausgetauscht wird, ist diese Annahme für Zinsswaps gut zu rechtfertigen (vgl. Duffie und Huang (1996)).

Portfoliowahl: Wir betrachten verschiedene Portfolios aus diesen vier Swap-Kontrakten. Wir beschreiben hier das Verfahren, mit dem wir den einzelnen Kontrahenten die Swap-Kontrakte zuordnen:

Das Kreditrisiko jedes Kontrahenten $a = 1, \dots, N$ ist charakterisiert durch die Angabe seiner Bonität und des Response-Koeffizienten k_a , der die Sensitivität der Ausfallwahrscheinlichkeit von

a gegenüber den Zinsen bestimmt. Für jeden Kontrahenten wird das Rating und der Response-Koeffizient unabhängig zufällig festgelegt.

Wir unterscheiden sechs Rating-Klassen, die den Bonitäts-Einstufungen Aaa, Aa, A, Baa, Ba und B der Rating-Agentur Moody's entsprechen sollen. Wir ordnen dem Kontrahenten a die seiner Rating-Klasse entsprechende Ausfallintensität $S_a(r(0), 0)$ zu, die die Ausfallintensität zur Zeit $t = 0$ darstellt. In Abhängigkeit der Entwicklung des Zinssatzes $r(t)$ wird die Ausfallintensität $S_a(r(t), t)$ nach Gl. (6) zeitlich variabel sein. Wir benutzen die Ausfallintensitäten, die in Duffie und Singleton (1998) verwendet werden und auf Schätzungen von Moody's für den Zeitraum 1920-1997 beruhen. In Tabelle 4 sind diese Schätzwerte aufgeführt.

Rating	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
Intensität (bp/Jahr)	0	9	9	32	146	442

Tabelle 4: *Gemittelte Ausfallintensitäten in Basispunkten pro Jahr. Schätzung von Moody's für die Zeitperiode 1920-1997.*

Jedem Kontrahenten a wird eine zufällige Anzahl jedes der vier verschiedenen Swap-Kontrakte zugeordnet, wobei short-Positionen (entsprechen der paying-fixed-Seite) und long-Positionen (entsprechen der paying-float-Seite) möglich sind. Eine vorher festgelegte Anzahl von Kontrakten darf bei jedem Kontrahenten a nicht überschritten werden. Wir wählen als diese Schranke sieben Kontrakte. Außerdem wurde die Prozedur darauf abgestimmt, daß nur wenige Kontrahenten gegenüber allen vier verschiedenen Swap-Kontrakten exponiert sind.

Die Prozedur verteilt die Kontrakte unter der Nebenbedingung, daß die Summe der Nominalwerte der Swap-Kontrakte einer Sorte über das gesamte Portfolio Null ergibt. Dabei zählen wir long paying-fixed Positionen mit positiven Nominalwert und long paying-float Positionen (entsprechen short paying-fixed Positionen) mit negativen "Nominalwert". Wir können somit die Finanzinstitution FI als Finanzintermediär ansehen, der keinen Marktrisiko ausgesetzt ist. Daher ist die hier angestellte ausschließliche Betrachtung des Kreditrisikos sinnvoll.

Simulationsverfahren: Wir berechnen auf Basis der nach dem Ito-Taylor-1.5-Schema¹³ diskretisierten stochastischen Differentialgleichung Gl. (18) einen zeitdiskreten Pfad $\{r(t_j)\}_{j=1,\dots,N_D}$ über den Zeitraum $[0, T]$ mit der Anzahl der Diskretisierungspunkten $N_D = T/\Delta t$. Dabei entspricht $T = 8$ Jahren. Wir verwenden durchgehend eine monatliche Auflösung¹⁴, d.h. $\Delta t = 1/12$.

¹³ vgl. Kloeden und Platen (1992) und Barth (2000) für die Darstellung der numerischen Techniken.

¹⁴ In Barth (2000) wird detailliert untersucht, daß eine solche Auflösung nicht ausreichend ist, um ohne ein geeignetes Korrekturverfahren eine gute Approximation der Quantilmaße QM und MQ zu liefern. Aufgrund der starken Einschränkungen durch die Rechenleistung können wir jedoch keine höhere Auflösung wählen. Jedoch wurde in Barth (2000) im Falle des CIR-Prozesses festgestellt, daß die Werte, die für die Verlustmaße

Nachdem ein Pfad des Zinssatzes $\{r(t_j)\}_{j=1,\dots,N_D}$ simuliert worden ist, können wir auf Basis einer zeitdiskreten Version des Modells MICR

$$\Delta L(r(t_j), t_j) = \frac{1}{B(0, t_j)} \sum_{a=1}^N V_a^+(r(t_j), t_j) S_a(r(t_j), t_j) \Delta t. \quad (19)$$

den Verlustpfad des Portfolios ermitteln. Für jeden simulierten Pfad des Zinssatzes $\{r(t)\}$ berechnen wir (i) die monatlichen Werte der vier Swaps $Z_i(t_j, T)$ (mit $i = 1, 2, 3, 4$) und (ii) den Wert der Response-Funktion $S_a(r(t_j), t_j)$. Wir bestimmen das Exposure V_a^+ jedes Kontrahenten a durch Bestimmung des Nettowertes V_a der Summe aller Positionen, die mit a eingegangen worden sind. Anschließend wird das Exposure $V_a^+(r(t_j), t_j)$ mit der monatlichen Ausfallwahrscheinlichkeit $S_a(r(t_j), t_j)$ multipliziert, um den Verlustpfad von Kontrahent a zu bestimmen. Die Verlustpfade aller Kontrahenten a werden addiert, um den Verlustpfad des gesamten Portfolios ΔL zu erhalten.

Dieses Verfahren wird wiederholt, wobei bei jedem Simulationslauf die monatlichen Werte des Zinssatzes, der Swaps und des Verlustprozesses gespeichert werden. Nachdem eine vorher festgelegte Anzahl von Simulationsläufen ausgeführt worden sind, werden aus den Daten die Verlustmaße EM, QM, MQ und TCE sowie die Konfidenzintervalle bestimmt.

5.3 Simulationen ohne Response

In diesem Abschnitt stellen wir alle Simulationsergebnisse vor, bei denen die Response-Stärke k_a für alle Kontrahenten a auf Null gesetzt worden ist, d.h. es gilt $S_a(r(t), t) = \text{konstant}$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist somit unabhängig von der Realisierung des Zinssatzes. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden als Referenzfall betrachtet, wenn wir in Abschnitt 5.4 die Auswirkungen der Reagibilität der Ausfallwahrscheinlichkeit auf den Zinssatz diskutieren.

Abhängigkeit von der Portfoliowahl

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Verlustmaße ME, MQ, QM und TCE, wenn sie auf vier verschiedene, durch denselben Mechanismus zufällig generierte Portfolios angewandt werden. Wir untersuchen vier Portfolios mit jeweils 50 Kontrahenten. Die Portfolios #1 bis #4 können als verschiedene Realisationen der zufälligen Generierungsmethode angesehen werden. Nach 1000 Realisationen des Zins-Prozesses werden die Risikomaße berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 aufgeführt¹⁵.

ME, MQ, QM und TCE auf monatlicher Basis bestimmt worden sind, zwischen 5% bis 10% unter den Werten liegen, die bei der Verwendung einer hinreichend genauen Auflösung ermittelt wurden.

¹⁵ Die Konfidenzintervalle berechnen sich nach der in Barth (2000) beschriebenen Methodik.

Port.	ME	t_{\max}	MQ	t_{\max}	Konf.	QM	Konf.	TCE	t_{\max}	#Real.
#1	0.15	18	0.33	18	[0.31, 0.34]	0.39	[0.37, 0.42]	0.38	24	1000
#2	0.09	24	0.23	24	[0.21, 0.26]	0.28	[0.26, 0.30]	0.28	24	1000
#3	0.16	18	0.38	23	[0.34, 0.43]	0.52	[0.49, 0.56]	0.50	24	1000
#4	0.08	18	0.21	18	[0.20, 0.23]	0.25	[0.24, 0.27]	0.26	18	1000

Tabelle 5: Risikomaße angewandt auf den Verlust verschiedener, zufällig generierter Portfolios (ohne Response). Die Werte sind in Basispunkten des Brutto-Nominalwertes des Portfolios angegeben. Die Maße MQ, QM und TCE beziehen sich auf ein 95%-Quantil, die aufgeführten Konfidenzintervalle auf ein 98% Vertrauensniveau. Die Zeit t_{\max} gibt den Zeitpunkt an, an dem der Erwartungswert bzw. das 95%-Quantil bzw. der TCE-Wert der Marginalverteilung maximal ist.

Die Ergebnisse in Tabelle 5 sind folgendermaßen zu interpretieren, vgl. die detaillierte Beschreibung der Verlustmaße in Kapitel 4: ME gibt den höchsten erwarteten monatlichen Verlust innerhalb der Laufzeit $[0, T]$ an. Beispielsweise ist im Falle des Portfolios 1 der höchste erwartete monatliche Verlust 0.15 Basispunkte des Bruttonominalwertes des Portfolios. Der “Peak Loss” MQ ist eine obere Schranke für den höchsten monatlichen Verlust, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit $q = 0.05$ überschritten wird: Mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit ist der höchste monatliche Verlust im Falle von Portfolio 1 nicht größer als 0.33 Basispunkte. QM ist eine obere Schranke für den höchsten monatlichen Verlust pro Realisation der Zinspfades. Für jeden Zinspfad überschreitet der höchste monatliche Verlust den Wert QM nur mit der Wahrscheinlichkeit $q = 0.05$: Der maximale monatliche Verlust ist für jede Realisation des Zinspfades mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht höher als 0.39 Basispunkte. TCE gibt an, welcher Verlust erwartet wird, wenn er größer als das obere 95%-Quantil der Verlustverteilung ausfällt. Dabei wird der maximale monatliche Verlust bei Überschreitung des Quantils aufgeführt. Wenn der Portfolioverlust eines Monats das 95%-Quantil der Verluste dieses Monats überschreitet, wird im Falle von Portfolio 1 erwartet, dass dieser Portfolioverlust maximal 0.52 Basispunkte beträgt.

Nach dieser Untersuchung identifizieren wir Portfolio #3 als das Portfolio, das (gemessen nach allen Maßen) das größte Ausfallpotential hat. Während jedoch das ME-Maß Portfolio #3 gegenüber Portfolio #1 nur einen um 7% erhöhten Wert zuordnet, beträgt dieser Zuwachs bei dem QM-Maß 33% und bei dem TCE-Maß 32%. Das MQ-Maß erhöht sich um nur um 15%. Die Entscheidung, welches der Portfolios am risikobehaftesten ist, kann aufgrund der differenzierten Werte der Maße QM und TCE am besten getroffen werden. QM und TCE reagieren sensibler auf die spezielle Portfoliostuktur als die Maße ME und MQ. Die größere Streuung der QM-Werte gegenüber der MQ-Werte haben wir in den theoretischen Überlegungen in Abschnitt 4.1 nicht vorhergesehen und stellt daher eine neue, vorläufige Erkenntnis dar, die wir bei den numerischen Untersuchungen dieser Portfolios unter Berücksichtigung der Reagibilität in Abschnitt 5.4 überprüfen werden.

Größenordnung: Warum sind diese Werte so klein? Ein Verlust in der Größenordnung von 0.33 Basispunkten erscheint als vernachlässigbar, aber (erstens) bezieht sich der Verlust auf den Brutto-Nominalwert des gesamten Portfolios, der sich aus der Summe der Nominalwerte aller Swaps berechnet, wobei kein Netting durchgeführt wird. Zweitens wird der Nominalwert im Falle der Zinsswaps nicht ausgetauscht und ist damit nicht ausfallgefährdet. Nur der Nettobetrag zwischen der festen und der variablen Zahlung ist ausfallgefährdet. Nach Duffie und Huang (1996) beträgt der typischen Spread bei Zinsswaps weniger als 1 Basispunkt. Drittens beziehen sich die verwendeten Maße auf den Verlust in einem kurzen Zeitintervall (bei der hier angewandten Diskretisierung beträgt dieses Zeitintervall einen Monat) und nicht auf die kumulierten Verluste in einen längeren Zeitraum. Die Maße ME, MQ und TCE beziehen sich auf den Monat, in dem die marginale Verlustverteilung am breitesten war bzw. die Verteilungsenden am stärksten belegt waren, während das QM-Maß sich auf den maximalen Verlust pro Monat jeder Realisation bezieht.

Variation der Größe des Portfolios

Skalierungseffekte: Hull (1989) stellt die Hypothese auf, daß die Randbereiche der Verlustverteilungen von kleinen Portfolios stärker belegt sein sollten als bei großen Portfolios. Er führt diese Aussage auf die Diversifikation zurück, die in einem großen Portfolios deutlicher bemerkbar sein soll. Daher müßte das risikobasierte Eigenkapital für die Portfolios von kleinen Banken relativ zur Portfoliogröße gesehen größer sein als das Eigenkapital von großen Banken. Wir wollen diese Aussage überprüfen durch die Anwendung der Verlustmaße QM, MQ und TCE auf den Verlustprozeß, der von dem Modell MICR generiert wird. Als Nebenprodukt dieser Untersuchung können wir die Subadditivitätseigenschaft der Verlustmaße in Spezialfällen überprüfen. Wir sehen die Portfolios #1, #2 und #3 aus Tabelle 5, die je 50 Kontrahenten umfassen, als kleine Portfolios an. Als großes Portfolio betrachten wir das aus diesen drei Portfolios zusammengesetzte Portfolio, das 150 Kontrahenten umfaßt. Die Maße ME, MQ, QM und TCE beziehen sich auf die relativen Verluste eines Portfolios, bezogen auf den Bruttonominalbetrag des Portfolios. Wir bilden den mit den Bruttonominalbeträgen gewichteten Mittelwert der in Tabelle 5 aufgeführten Maße für die Portfolios #1, #2 und #3, um ein Maß für die Schwere der Tails der kleinen Portfolios zu erhalten. Die auf diese Art ermittelten Maße werden durch AME, AMQ, AQM und ATCE bezeichnet. Wir vergleichen diese Werte mit den entsprechenden Verlustmaßen, die sich auf den Verlustprozeß des großen Portfolios beziehen. Der Verlustprozeß des großen Portfolios wurde aus den drei Verlustprozessen der einzelnen Portfolios #1, #2 und #3 additiv zusammengesetzt und wieder auf den Bruttonominalbetrag des großen Portfolios

normiert, um den relativen Verlust zu erhalten. Wir bezeichnen¹⁶ die Maße, die auf diesen Verlustprozeß angewendet wurden, durch MEA, MQA, QMA und TCEA.

	MEA	AME	MQA	AMQ	QMA	AQM	TCEA	ATCE
ohne Resp.	0.13	0.13	0.23	0.31	0.27	0.39	0.27	0.39

Tabelle 6: *Auswirkungen der Portfoliogröße. Die Maße MQA, AMQ, QMA, AQM, TCEA und ATCE sind bezogen auf ein 95%-Quantil, die angegebenen Konfidenzintervalle beziehen sich auf ein 98% Vertrauensniveau. Die Werte sind in Basispunkten des Brutto-Nominalwertes des Portfolios angegeben.*

Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Tabelle 6 aufgeführt. Wir beobachten, daß $MEA \leq AME$, $MQA \leq AMQ$, $QMA \leq AQM$ und $TCEA \leq ATCE$ gilt. Dies unterstützt die Aussage von Hull (1989), da der Mittelwert der Verlustmaße der kleineren Portfolios (“A ...”) eine höhere Eigenkapitalforderung nach sich zieht als die Maße, angewendet auf den Verlustprozeß des großen Portfolios (“... A”). Die aus den Maßen MQA, QMA und TCEA folgenden Eigenkapitalforderungen sind sogar kleiner als die Anforderungen, die aus der getrennten Anwendung dieser Maße auf die einzelnen Portfolios folgen (vgl. Tabelle 5). Wir können daher im Falle ohne Response die Aussage von Hull (1989) bestätigen. In Abschnitt 5.4 werden wir dieselbe Untersuchung im Falle mit eingeschalteter Response der Ausfallwahrscheinlichkeit auf den Zinssatz wiederholen.

Marginale Effekte und Subadditivität: Kann durch eine Aufteilung des Portfolios in Subportfolios die Eigenkapitalforderung verringert werden? Artzner et al. (1997) stellen fest, daß das risikobasierte Eigenkapital, das durch ein quantilbasiertes Maß wie das Value-at-Risk-Maß (bzw. MQ) bestimmt wurde, theoretisch diese unerwünschte Eigenschaft haben kann, die mit den Skalierungseffekten eng verwandt ist, die im vorigen Abschnitt behandelt wurden.

Wir überprüfen die Subadditivität im Zusammenhang mit dem marginalen Effekt, den die Hinzunahme eines Swap-Kontraktes zu dem Portfolio hat. Wir vergleichen die Eigenkapitalanforderung, die aus der separaten Behandlung des Portfolios und des “neuen” Swaps resultiert mit dem Eigenkapital, das für das Portfolio nötig ist, das den Swap schon einschließt. Wenn durch “M” symbolisch das Maß bezeichnet wird (d.h. $M = ME, MQ, QM$ oder TCE), durch “S” der

¹⁶ Wir nehmen den gewichteten Mittelwert der Verlustpfade, um den relativen Verlustpfad des großen Portfolios zu erhalten. Grob gesprochen wurde die Mittelwertbildung mit der Anwendung der Maße ME, MQ, QM und TCE gegenüber der Anwendung bei den kleinen Portfolios vertauscht. Im Falle der kleinen Portfolios wurden zuerst die Maße ME, MQ, QM und TCE angewandt und dann der Mittelwert (Average) gebildet, daher die Bezeichnungen AME, AMQ, AQM und ATCE. Im Falle des großen Portfolios wurde zuerst der Mittelwert der Verlustpfade gebildet und dann die Maße angewendet, daher die Bezeichnung MEA, MQA, QMA und TCEA.

Verlustprozeß des zusätzlichen Swaps und durch “P” der Verlustprozeß des restlichen Portfolios, dann sollte nach der Subadditivität gelten:

$$\begin{aligned} M(P+S) &\leq M(P) + M(S) \\ \Leftrightarrow M(P+S) - M(P) &\leq M(S). \end{aligned} \quad (20)$$

Der marginale Effekt $M(P+S) - M(P)$, den die Hinzunahme des Swaps S zu dem Portfolio P hat, sollte nach der Subadditivität kleiner sein als das Kreditrisiko des Swaps $M(S)$ alleine.

Duffee (1996a) stellt die Hypothese auf, daß der marginale Effekt $M(P+S) - M(P)$ ein besseres Maß für das Kreditrisiko eines Kontraktes als $M(S)$ darstellt, da der Kontrakt in Bezug zu dem schon vorhandenen Portfolio gesehen wird. Duffee (1996a) befürchtet, daß durch die “Stand-alone” Untersuchung des Kontraktes ein Sicherheitsmangel durch eine zu geringe Eigenkapitalanforderung entstehen könnte. Diese Warnung ist bei einem nicht-kohärenten Maß wie dem Value-at-Risk Maß berechtigt. Da aber für ein kohärentes Maß die Subadditivität (Gl. (20)) gilt, ist diese Befürchtung bei Verwendung eines kohärenten Maßes gegenstandslos.

Effekt	S-Rat.	ME	MQ	Konf.	QM	Konf.	TCE
M(P)	-	2.789	6.929	[6.490, 7.331]	8.215	[7.891, 8.888]	8.334
M(P)+M(S)	Aa	2.791	6.939	-	8.228	-	8.347
M(P+S)	Aa	2.791	6.929	[6.490, 7.331]	8.215	[7.891, 8.888]	8.342
M(S)	Aa	0.002	0.010	[0.008, 0.011]	0.013	[0.013, 0.014]	0.013
M(P+S)-M(P)	Aa	0.002	0.000	-	0.000	-	0.008
M(P)+M(S)	Baa	2.798	6.966	-	8.263	-	8.380
M(P+S)	Baa	2.797	6.942	[6.490, 7.344]	8.215	[7.920, 8.884]	8.360
M(S)	Baa	0.009	0.037	[0.031, 0.040]	0.048	[0.045, 0.051]	0.046
M(P+S)-M(P)	Baa	0.008	0.013	-	0.000	-	0.026
M(P)+M(S)	B	2.908	7.437	-	8.876	-	8.971
M(P+S)	B	2.904	7.227	[6.812, 7.631]	8.523	[8.028, 9.155]	8.707
M(S)	B	0.119	0.508	[0.429, 0.555]	0.661	[0.062, 0.070]	0.637
M(P+S)-M(P)	B	0.113	0.298	-	0.308	-	0.373

Tabelle 7: Marginale Effekte, den die Hinzunahme einer neuen Swap-Position S mit einem neuen Kontrahenten zu einem bestehenden Portfolio P hat. Der neue Kontrahent hat das Rating Aaa, Baa oder B. Es wurde keine Response der Ausfallwahrscheinlichkeit auf die Zinsen berücksichtigt. Die Werte sind absolute Verluste in Tausendstel des Nominalwertes. Die Maße MQ, QM und TCE beziehen sich auf ein 95%-Quantil, die aufgeführten Konfidenzintervalle auf ein 98% Vertrauensniveau. Die Zeit t_{\max} gibt den Zeitpunkt an, an dem der Erwartungswert bzw. das 95%-Quantil bzw. der TCE-Wert der Marginalverteilung maximal ist.

Wir überprüfen die Subadditivität (Gl.(20)) numerisch für die Maße EM, QM, MQ und TCE, in dem wir zu einem bestehenden Portfolio (wir wählen Portfolio #4 aus Tabelle 5) einen neuen Kontrahenten hinzunehmen, der einen Swap hält (wir wählen Swap #3 aus Tabelle 3). Wir untersuchen als “neue” Kontrahenten verschiedene Unternehmen mit Moodys-Rating Aa, Baa und B. In Tabelle 7 sind die Ergebnisse aufgeführt.

Für alle Maße und alle Kontrahenten ist die Subadditivität erfüllt. Wir haben kein Gegenbeispiel gefunden, das die Subadditivität bei den quantilbasierten Maßen verletzt. In allen Fällen ist das Kreditrisiko des einzelnen Swap-Kontraktes größer als das Kreditrisiko des Swaps, wenn er in das Portfolio integriert ist. Wir untersuchen in Abschnitt 5.4, ob die Subadditivität auch erfüllt ist, wenn wir den Verlustprozeß des Portfolios unter Beachtung der Reagibilität untersuchen.

5.4 Simulationen mit Response

Im vorigen Abschnitt wurden die numerischen Untersuchungen ohne Beachtung der Auswirkungen des Zinsniveaus auf die Ausfallwahrscheinlichkeit der Kontrahenten $a = 1, \dots, N$ ausgeführt. Das Modell MICR erlaubt jedoch die Berücksichtigung dieser Auswirkung durch die Modellierung einer Response-Funktion S_a , vgl. Gl.(2). In diesem Abschnitt untersuchen wir das Modell MICR numerisch unter verschiedenen Spezifikationen dieser Response-Funktion, die die Reagibilität der Ausfallwahrscheinlichkeit auf die Zinsen beschreibt. Diese Untersuchungen sind entscheidend für die Einschätzung der Bedeutung der Response-Eigenschaft des Modells MICR für das Kreditrisikomanagement.

Abhängigkeit von der Responsestärke

Wir studieren in diesem Abschnitt die Auswirkungen verschiedener Responsekoeffizienten k_a , die bei der exponentiellen Response-Funktion (vgl. Gl.(6)) die Stärke der Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit vom Zinsniveau r angibt.

Wir unterscheiden vier “Response-Klassen” $i = 1, 2, 3, 4$: Je eine Klasse mit einer leicht negativen ($k_1 = -1$), mit verschwindender ($k_2 = 0$), mit leicht positiver ($k_3 = +1$) und mit starker positiver Response-Stärkenkennzahl ($k_4 = +4$). Bei der Generierung des Portfolios wurde jeder Kontrahenten in eine zufällig ausgewählte Response-Klasse i eingeteilt. Wenn Kontrahent a sich in der Response-Klasse i befindet, dann gilt für seinen Response-Koeffizienten $k_a = k k_i$, wobei wir die absolute Response-Stärke $|k_a|$ durch die Multiplikation der Klassenkennzahl k_i mit einem Skalierungsfaktor k variieren. Wir wählen für den Skalierungsfaktor $k = 0, 2, 4, 6, 8$, so daß in allen Fällen $k_a \in [-32, 32]$ gilt. Dies ist eine vorsichtige Wahl für die absolute Response-Stärke, da aus den empirischen Schätzungen (siehe Abschnitt 3) höhere absolute Werte für die Response-Stärke folgen können.

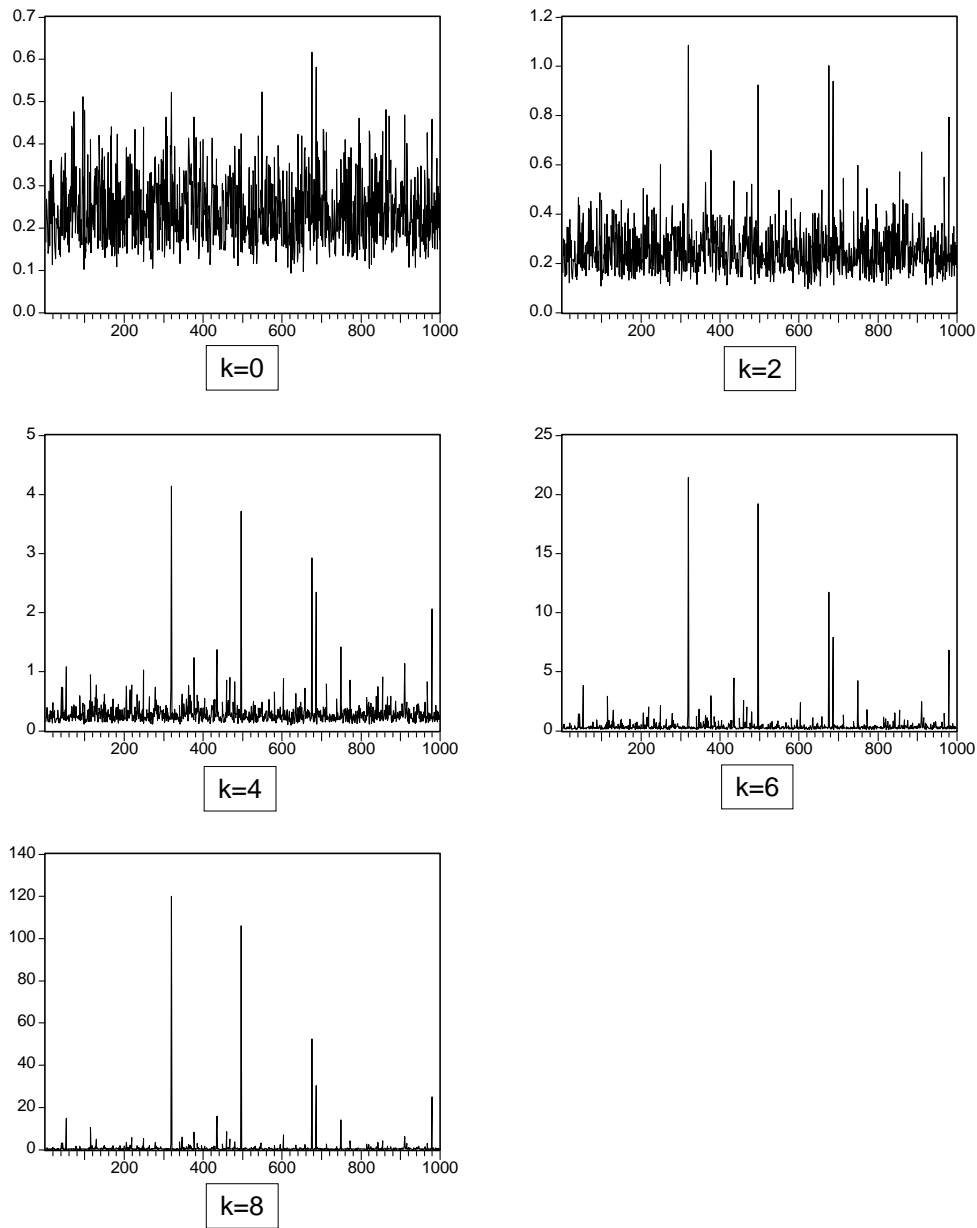


Abbildung 1: Der (diskontierte) maximale Verlust jeder Realisation des Verlustpfades wurde aufgetragen gegen die Nummer der Realisation. Der Verlust wurde in Basispunkten des Bruttonominalwertes des Portfolios angegeben. Dabei wurde die Response-Stärke $k = 0, 2, 4, 6, 8$ variiert und die exponentielle Reponse-Funktion (Gl. (6)) verwendet. Alle Abbildungen beruhen auf denselben Realisationen des Zinsprozesses.

Wir untersuchen 1000 Realisationen des Zinsprozesses und berechnen die entsprechenden Realisationen des Verlustprozesses von Portfolio #1 (siehe Tabelle 5), wobei wir für jede Einstellung des Skalierungsfaktors der Response-Stärke $k = 0, 2, 4, 6, 8$ einen eigenen Verlustprozeß berechnen. Um einen qualitativen Eindruck der Auswirkung der Response-Stärke zu vermitteln, sind in Abbildung 1 der diskontierte (pfadweise) maximale Verlust jeder Realisation aufgetragen. Für

jede Einstellung der Response-Stärke wurde ein eigenes Diagramm gewählt. Die aufgetragenen Daten entsprechen der Maximumverteilung, aus der das Maß QM ermittelt wird. Die anderen Maße ME, MQ und TCE beruhen auf der “maximalen” marginalen Verteilung, die in Abbildung 1 nicht angegeben ist.

Verschiedene vorläufige qualitative Beobachtungen können bei der Betrachtung von Abbildung 1 gemacht werden:

- (i) Es existiert ein “Grundniveau” des maximalen pfadweisen Verlustes. Dieses Grundniveau (≈ 0.2 bis 0.3 Basispunkte des Nominalwertes) könnte einem erwarteten maximalen Verlust entsprechen, wenn nur gewöhnliche Marktsituationen betrachtet werden. Das Grundniveau scheint von der Höhe der Response-Stärke unbeeinflusst zu sein.
- (ii) Wenn die Reagibilität nicht berücksichtigt ist ($k = 0$), sind die Enden der Verteilung nicht stark belegt. Bei wachsender Response-Stärke ändert sich diese Situation jedoch: Das Grundniveau bleibt unverändert, aber die Peaks werden deutlich höher. Die Belegung der Enden der Maximumverteilung der Verluste wächst somit bei steigender Response-Stärke.
- (iii) Die Diagramme von Abbildung 1, die die Verluste bei starker Response-Stärke $k \geq 4$ darstellen, ähneln Abbildungen, bei denen im aktuariellen Kontext die Schadenshöhe gegenüber der Zeit auftragen ist (beispielsweise die Höhe der Schäden, die durch Feuer entstanden sind, siehe Embrechts et al. (1997)).
- (iv) Nicht alle auffallenden Peaks, die in dem Diagramm für $k = 0$ erscheinen, stellen bei eingeschalteter Response auch die herausragenden Peaks dar. Die Reponse-Stärke ist damit kein einfacher (exponentieller) Skalierungsfaktor des Verlustprozesses.

Abs. Resp. k	0	2	4	6	8
Max. Verl. (Bp/Nom): #603	0.34	0.32	0.32	0.31	0.36
Max. Verl. (Bp/Nom): #604	0.27	0.41	0.89	2.38	7.09

Tabelle 8: *Vergleich der maximalen Verluste desselben Portfolios für zwei Realisationen bei variiertes Response-Stärke k . Angaben in Basispunkten des Nominalwertes.*

Wir wiederholten diese Untersuchung für die ersten drei der zufällig generierten Portfolios aus Tabelle 5. Für jedes dieser Portfolios bleiben die qualitativen Beobachtungen dieselben. Allerdings verschiebt sich das Grundniveau der maximalen Verluste.

Um die Stärke der Belegung der Verteilungsenden quantitativ zu messen, wenden wir die Verlustmaße ME, MQ, QM und TCE auf die Verluste der drei Portfolios an. Wir stellen in Tabelle 9 die Resultate dar. Wir tabellieren außerdem die relative Steigerung ME’ etc. gegenüber dem Wert des jeweiligen Maßes, das auf den Verlustprozeß ohne Response angewendet wurde. Dieses

k	Port.	ME	ME'	MQ	MQ'	Konf.	QM	QM'	Konf.	TCE	TCE'
0	#1	0.15	1.00	0.33	1.00	[0.31, 0.34]	0.39	1.00	[0.38, 0.42]	0.38	1.00
0	#2	0.09	1.00	0.23	1.00	[0.21, 0.26]	0.28	1.00	[0.26, 0.30]	0.29	1.00
0	#3	0.16	1.00	0.38	1.00	[0.34, 0.43]	0.52	1.00	[0.49, 0.56]	0.50	1.00
2	#1	0.15	1.00	0.33	1.00	[0.31, 0.35]	0.41	1.05	[0.40, 0.44]	0.41	1.08
2	#2	0.10	1.11	0.25	1.09	[0.23, 0.30]	0.37	1.32	[0.35, 0.42]	0.37	1.28
2	#3	0.17	1.06	0.48	1.26	[0.39, 0.55]	0.77	1.48	[0.70, 0.87]	0.70	1.40
4	#1	0.16	1.07	0.34	1.03	[0.31, 0.38]	0.54	1.38	[0.49, 0.63]	0.53	1.39
4	#2	0.11	1.22	0.32	1.39	[0.27, 0.40]	0.61	2.18	[0.56, 0.71]	0.56	1.93
4	#3	0.20	1.25	0.63	1.66	[0.49, 0.75]	1.35	2.60	[1.18, 1.68]	1.35	2.70
6	#1	0.17	1.13	0.38	1.15	[0.30, 0.45]	0.91	2.33	[0.77, 1.20]	1.06	2.79
6	#2	0.14	1.56	0.44	1.91	[0.34, 0.59]	1.14	4.07	[0.94, 1.48]	1.00	3.44
6	#3	0.32	2.00	0.85	2.24	[0.59, 1.15]	2.68	5.15	[2.24, 3.31]	3.96	7.92
8	#1	0.28	1.86	0.51	1.55	[0.39, 0.68]	1.79	4.59	[1.46, 2.81]	3.50	9.21
8	#2	0.20	2.22	0.65	2.82	[0.45, 0.82]	2.40	8.57	[1.77, 3.40]	2.22	7.66
8	#3	0.93	5.81	1.30	3.42	[0.84, 1.89]	5.32	10.23	[4.53, 7.11]	15.70	31.40

Tabelle 9: Verlustmaße für die Portfolios #1, #2, #3 bei variierender Response-Stärke k . Im Falle von Portfolio #1 wurden 1026 Realisationen ausgeführt, bei Portfolio #2 1010, bei Portfolio #3 1000. Die Werte sind in Basispunkten des Brutto-Nominalwertes des Portfolios angegeben. Die Maße MQ, QM und TCE beziehen sich auf ein 95%-Quantil, die aufgeführten Konfidenzintervalle auf ein 98% Vertrauensniveau. Die Angaben ME' etc. stellen die relative Steigerung des jeweiligen Verlustmaßes gegenüber dem Fall ohne Response dar.

Verhältnis sehen wir als Maß für die Sensitivität an, mit der das Maß auf die schwereren Tails reagiert, die durch die wachsende Response-Stärke verursacht worden sind. Aufgrund dieser Tabelle können wir entscheiden, welche der Maße geeignet sind, Worst Cases zu messen:

ME: Das Maß ME reagiert erst bei der stärksten Reponse-Stärke $k = 8$ deutlich auf das Vorhandensein stärker besetzter Verteilungsenden. Für $k < 8$ variiert das ME-Maß nur wenig und ist daher als Maß für Worst Cases nicht geeignet, weil es keine ausreichende Sensitivität aufweist.

MQ: Es ist überraschend, daß das Value-at-Risk Maß MQ, das auf den Quantilen der marginalen Verteilungen beruht, genauso insensitiv reagiert wie das Maß ME. Selbst bei $k = 8$ sind die Auswirkungen der stark besetzten Verteilungsenden gering.

QM: Schon bei geringen Response-Stärken k reagiert das QM-Maß sensitiv auf das Vorhandensein stärker belegter Verteilungsenden. Bei jedem Portfolio ist die Variation des Maßes QM zwischen geringerer Response-Stärke und höherer Response-Stärke deutlich größer als

bei den Maßen ME und MQ. Daher erscheint QM besser geeignet, das Vorhandensein einer größeren Wahrscheinlichkeit für stärkere Verluste quantitativ genau messen zu können.

TCE: Das Shortfall-Maß TCE reagiert ähnlich sensitiv wie das Maß QM. Allerdings zeigt das TCE-Maß im Falle von Portfolio #3 einen deutlich stärkeren Ausschlag bei Response-Stärke $k = 8$ als das Maß QM. Dies ist ein Anzeichen, daß das TCE-Maß auch gefährliche Belegungen der äußersten Verlustverteilungsenden anzeigen kann.

Wir schließen aus dieser Untersuchung, daß die Maße QM und TCE als Worst-Case-Maße gut geeignet erscheinen, während die Maße ME und MQ nicht sensitiv genug reagieren. Überraschend ist das schlechte Abschneiden des Value-at-Risk Maßes MQ, das im Risikomanagement oft verwendet wird. Es erscheint angebracht, bei Ermittlung des risikobasierten Eigenkapitals durch ein Value-at-Risk Maß eine ergänzende Betrachtung des Short-Fall Maßes TCE durchzuführen.

Variation der Größe des Portfolios

Wie im Fall ohne Response (vgl. Abschnitt 5.3) untersuchen wir Skalierungseffekte und die Subadditivitätseigenschaft. Wie im vorigen Abschnitt 5.4 berechnen wir die Verlustprozesse mit verschiedenen Response-Stärken, die durch den Skalar $k = 0, 2, 4, 6, 8$ variiert wird.

Skalierungseffekte: Um die Skalierungseffekte zu untersuchen, bestimmen wir einerseits den gewichteten Durchschnitt der Verlustmaße, um ein Maß für die Schwere der Tails der kleinen Portfolios #1, #2, #3 zu erhalten (“A ...”) und andererseits die Verlustmaße, angewandt auf den relativen Verlustprozeß des großen Portfolios, um ein Maß für die Belegung der Verteilungsenden des großen Portfolios zu bestimmen (“... A”). Die Ergebnisse sind in Tabelle 10 aufgeführt.

k	MEA	AME	MPA	AMP	PMA	APM	TCEA	ATCE
0	0.13	0.13	0.23	0.31	0.27	0.39	0.27	0.39
2	0.14	0.14	0.26	0.35	0.34	0.50	0.33	0.48
4	0.15	0.16	0.33	0.42	0.57	0.80	0.54	0.78
6	0.19	0.21	0.46	0.54	1.14	1.51	1.51	1.90
8	0.43	0.45	0.74	0.79	2.87	3.03	5.92	6.73

Tabelle 10: Skalierungseffekte für verschiedene Response-Stärken k . Die Maße AMQ, MQA, AQM, QMA, ATCE und TCEA sind bezogen auf ein 95%-Quantil. Die Werte sind angegeben in Basispunkten des Brutto-Nominalwertes des gesamten Portfolios.

Stets ergibt die Anwendung eines Verlustmaßes auf den (relativen) Verlustprozeß (“... A”) des großen Portfolios eine kleinere Eigenkapitalanforderung als der Mittelwert der Maße (“A ...”)

im Falle der kleinen Sub-Portfolios. Dieses Ergebnis zeigt, daß ein großes Portfolio Diversifikationsvorteile gegenüber kleinen Portfolios hat.

Allerdings sind die Maße MQA (oder QMA, TCEA) nicht (wie im Falle ohne Response) für alle Sub-Portfolios kleiner als MQ (oder QM, TCE) der Sub-Portfolios. Dies ist auf die große Variation zwischen den Ergebnissen bei den Portfolios #1, #2 und #3 zurückzuführen. Beispielsweise ist Portfolio #3 (das das am stärksten durch Ausfälle bedrohte Portfolio darstellt) im großen Portfolio hauptverantwortlich für die schweren Verteilungsenden bei starker Response $k = 8$, so daß der relative Verlust des großen Portfolios größer ist als die relativen Verluste der Portfolios #1 und #2. Trotzdem ist die Auswirkung der Diversifikationseffekte deutlich bemerkbar, so daß wir die Hypothese von Hull (1989) nicht falsifizieren können.

Effekt	Rat.	ME	MQ	Konf.	QM	Konf.	TCE
M(P)	-	3.66	9.01	[7.21, 12.00]	22.57	[18.12, 34.39]	25.54
M(P)+M(S)	Aa	3.68	9.07	-	22.84	-	25.87
M(P+S)	Aa	3.67	9.07	[7.26, 12.10]	23.19	[18.40, 34.84]	25.74
M(S)	Aa	0.02	0.06	[0.04, 0.07]	0.28	[0.20, 0.44]	0.32
M(P+S)-M(P)	Aa	0.01	0.06	-	0.62	-	0.20
M(P)+M(S)	Baa	3.73	9.22	-	23.55	-	26.69
M(P+S)	Baa	3.71	9.22	[7.28, 12.30]	23.56	[18.84, 36.18]	26.23
M(S)	Baa	0.07	0.21	[0.13, 0.26]	0.98	[0.71, 1.55]	1.15
M(P+S)-M(P)	Baa	0.05	0.21	-	1.00	-	0.69
M(P)+M(S)	B	4.63	11.88	-	36.11	-	41.49
M(P+S)	B	4.33	11.86	[8.39, 14.30]	33.10	[27.58, 52.61]	35.07
M(S)	B	0.97	2.87	[1.84, 3.64]	13.54	[9.80, 21.45]	15.95
M(P+S)-M(P)	B	0.67	2.85	-	10.54	-	9.53

Tabelle 11: *Marginale Auswirkungen der Hinzunahme einer neuen Swap-Position. Das Rating des neuen Kontrahenten a ist Aa, Baa oder B. Der Kontrahent a' , der diesen neuen Swap hält, hat eine starke positive Reagibilität ($k_{a'} = k_4$). Die Werte sind absolute Verluste in Tausendstel des Nominalwertes. Die Maße MQ, QM und TCE beziehen sich auf ein 95%-Quantil, die aufgeführten Konfidenzintervalle auf ein 98% Vertrauensniveau. Die Zeit t_{\max} gibt den Zeitpunkt an, an dem der Erwartungswert bzw. das 95%-Quantil bzw. der TCE-Wert der Marginalverteilung maximal ist.*

Marginale Effekte und Subadditivität: Wir studieren wie im Fall ohne Response (siehe Abschnitt 5.3) die Subadditivitätseigenschaft (Gl. (20)) unter Berücksichtigung der Reagibilität der Ausfallwahrscheinlichkeit. Wir betrachten einen Swap mit einem zusätzlichen Kontrahenten a' , der nicht an dem bisher untersuchten Portfolio beteiligt war (wir wählen erneut Portfolio #4 und Swap #3). Die Bonität von a' nimmt die (Moody-)Ratings Aa, Baa oder B an. Wie die

anderen Kontrahenten des Portfolios hat a' eine exponentielle Response-Funktion (Gl. (6)), wobei wir einen starken negativen Response-Koeffizienten $\Leftrightarrow 4$ unterstellen, so daß $k_{a'} = k(\Leftrightarrow 4)$ gilt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 wiedergegeben. Wir machen zwei wichtige Beobachtungen:

Erstens: Die Subadditivitätseigenschaft ist im Falle des quantilbasierten Maßes QM verletzt. Die Eigenkapitalanforderung, die sich bei getrennter Betrachtung des neuen Kontrahenten ergibt, ist in zwei Fällen (Rating Aa und Baa) geringer als bei der Ermittlung im Kontext des schon bestehenden Portfolios. FI könnte durch eine separate Buchung des neuen Kontrahenten a' die Eigenkapitalanforderung senken. Die Warnung von Duffee (1996a), die die Gefahr der Unterschätzung des Ausfallpotentials bei einer separaten Buchung des Kreditrisikos eines Kontraktes betrifft, kann aufgrund dieses Beispiels für nicht-kohärente Maße unterstrichen werden. Dagegen haben wir kein Gegenbeispiel gefunden, um die Kohärenz von MQ zu widerlegen. Das Maß TCE ist nach Artzner et al. (1997) ein kohärentes Maß, was mit den Ergebnissen dieser Untersuchung übereinstimmt: In keinem Fall ist der marginale Effekt größer als der "Stand-alone"-Effekt, so daß für kohärente Maße die Warnung von Duffee (1996a) nicht angebracht ist.

Zweitens: Wir stellen fest, daß ein einzelner Kontrakt das Kreditrisiko des ganzen Portfolios bedeutend beeinflussen kann, wenn dieser Kontrakt von einer gefährlichen Gegenpartei gehalten wird. Im Falle des schlechten Ratings B der Gegenpartei, deren Kreditrisiko zudem sehr sensitiv auf das Zinsniveau reagiert, bewirkt der einzelne zusätzliche Kontrakt, daß das ME-Maß um 18%, MQ um 31%, QM um 46% und TCE um 36% ansteigt. Diese hohen Steigerungen lassen auf ein gut diversifiziertes Portfolio schließen, zu dem ein schlechtes Risiko hinzugenommen wird.

6 Zusammenfassung und Schlußfolgerung

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methodik vorgestellt, mit der das Kreditrisiko eines Portfolios aus marktabhängigen Finanzkontrakten abgeschätzt werden kann. Dabei sollte insbesondere der Einfluß der Marktrisiken auf das Ausfallpotential der einzelnen Vertragspartner in extremen Marktsituationen berücksichtigt werden. Die Methodik setzt sich aus drei Bausteinen zusammen:

Der *erste Baustein* ist die Quantifizierung des Kreditverlustes des Portfolios. Dazu wurde ein Prozeß modelliert, der die Verluste durch Ausfälle von Vertragspartnern in einer gegebenen Marktsituation darstellt. Im speziellen Fall, in dem ein Zinssatz das einzige Marktrisiko darstellt, berücksichtigt eine exponentielle Reaktionsfunktion den Einfluß dieses Marktrisikos auf das Ausfallrisiko.

Der *zweite Baustein* besteht in der Entwicklung und Diskussion von Worst-Case-Risikomaßen, die das Eigenkapital bestimmen, das auch in sehr ungünstigen Marktsituationen ausreichend ist. Neben dem Value-at-Risk-Maß wird ein Maß betrachtet, das als Quantil der Verteilung

des pfadweisen Maximums definiert ist und bisher nicht im Risikomanagement verwendet wird. Weiterhin wird ein Shortfall-Maß untersucht, das als Erwartungswert der Verluste definiert ist, die eine gewisse Schranke überschreiten.

Der *dritte Baustein* besteht in der quantitativen Untersuchung der Auswirkungen der Stärke der Responsefunktion auf das Ausfallpotential eines Beispielportfolios aus Zinsswaps. Die Worst-Case-Risikomaße werden auf die Realisationen des Verlustprozesses angewandt, um das Eigenkapital zu ermitteln. Der Schwerpunkt liegt auf dem Vergleich der Ausfallhöhe, die sich bei Berücksichtigung der Responseauswirkung ergibt, mit der Ausfallhöhe ohne Response.

Für das Kreditrisikomanagement des Portfolios ergeben sich folgende wichtige *Resultate*: Erstens macht sich die Response des Kreditrisikos auf die Marktrisiken besonders in extremen Marktsituationen bemerkbar. Das Kreditrisiko wird in diesen Worst-Case-Situationen deutlich erhöht, während sonst das Kreditrisiko annähernd unverändert bleibt. Aus dieser Feststellung folgt, daß das Kreditrisikomanagement eines Portfolios von marktabhängigen Finanzkontrakten nicht losgelöst von den Marktrisikofaktoren betrachtet werden kann.

Zweitens zeigt das Value-at-Risk-Maß die Auswirkung der Response auf das “schlechte” Verteilungsende der Portfolioverluste *nicht* zuverlässig an. Das Eigenkapital, das auch in extremen Marktsituationen ausreichen soll, wird durch das Value-at-Risk-Maß deutlich unterschätzt. Dagegen messen das auf der Maximumsverteilung des Verlustprozesses basierende Maß und das Shortfall-Maß das erhöhte Risiko für große Kreditverluste zuverlässiger. Aus der Anwendung dieser beiden Maße ergibt sich ein höheres Eigenkapital als bei Verwendung des Value-at-Risk-Maßes, da das erhöhte Ausfallpotential in extremen Marktsituationen im Gegensatz zu dem Value-at-Risk-Maß durch diese beiden Maße angezeigt wird.

Beide Ergebnisse führen zu deutlich höheren Eigenkapitalforderungen als der traditionelle Value-at-Risk-Ansatz unter der Annahme der Unabhängigkeit von Markt- und Kreditrisiken. Dies liegt zum einen daran, daß die Unabhängigkeitsannahme von Markt- und Kreditrisiken in extremen Marktsituationen nicht gültig ist, da durch das Marktrisiko ein stark erhöhtes Kreditrisiko induziert wird. Der andere Grund ist, daß das Value-at-Risk-Maß wichtige Elemente des Risikos wie die Höhe der Verluste vernachlässigt, die eine obere Schranke überschritten haben.

Ein Problem bei der praktischen Anwendung der vorgestellten Methodik wird die Beschaffung von Daten über das Responseverhalten der einzelnen Vertragspartner sein. Weiterhin sind die Eigenkapitalforderungen bei Verwendung der Worst-Case-Maße stark abhängig von der Wahl dieser Responseparameter. Daher werden Finanzinstitutionen die Eigenkapitalforderungen nicht direkt umsetzen wollen, da die Datenbasis zu unsicher ist. Jedoch eignet sich die Methodik für *systematische Streß-Tests*: Unter der Hypothese eines bestimmten Responseverhaltens können die Auswirkungen der extremen Marktsituationen mit Hilfe der Worst-Case Maße systematischer untersucht werden als bei der Auswertung der Portfolioverluste unter ad-hoc gewählten Crash-

Szenarien. Die Frage nach der Höhe der möglichen Verluste in extremen Situationen, die den eigentlichen Sinn eines Streß-Tests darstellt, kann so besser beantwortet werden.

Literatur

Albrecht, P. (1998): Stochastische Ansätze zur Quantifizierung des Ausfallrisikos von OTC-Finanzderivaten. *Transactions of the 26th Int. Congress of Actuaries*, 7, 359–370. .

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, und D. Heath (1997): Thinking coherently. *RISK*, 10, 68–71.

Barth, J. (2000): *Worst-Case Analysen des Ausfallrisikos von Finanzderivaten unter Berücksichtigung von Markteinflüssen*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Basle (1996): Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risks. Basle Committee of Banking Supervision, Bank of International Settlements.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, und S. A. Ross (1985a): An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53, 363–384.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, und S. A. Ross (1985b): A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385–407.

CreditSuisse (1997): *CreditRisk+*. Credit Suisse Financial Products.

Duffee, G. R. (1996a): On measuring credit risks of derivative instruments. *Journal of Banking and Finance*, 20, 805–833.

Duffee, G. R. (1996b): The variation of default risk with treasury yields. In *Risk Measurement and Systemic Risk*, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Duffie, D. und M. Huang (1996): Swap rates and credit quality. *Journal of Finance*, 51,3, 921–949.

Duffie, D. und K. J. Singleton (1998): Simulating correlated defaults. Working Paper Stanford University.

Düllmann, K., M. Uhrig-Homburg, und M. Windfuhr (1999): Risk structure of interest rates: An empirical analysis for deutschemark-denominated bonds. *forthcoming: European Financial Management*.

Edwards, F. R. (1999): Hedge funds and the collapse of long-term capital management. *Journal of Economic Perspectives*, 13.2, 189–210.

- Embrechts, P., C. Klüppelberg, und T. Mikosch (1997):** *Modelling Extremal Events*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Fons, J. S. (1994):** Using default rates to model the term structure of credit risk. *Financial Analysts Journal*, Sept.–Oct. 1994, 25–32.
- Hellwig, M. F. (1994):** Liquidity provision, banking, and the allocation of interest rate risk. *European Economic Review*, 38, 1363–1389.
- Hull, J. C. (1989):** An analysis of the credit risks in interest rate swaps and currency swaps. In *Recent Developments in International Banking and Finance*, 109–130.
- J.P.Morgan (1997):** *CreditMetrics*. J.P.Morgan.
- Karatzas, I. und S. E. Shreve (1988):** *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer-Verlag Inc.
- Kloeden, P. E. und E. Platen (1992):** *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
- Longstaff, F. A. und E. S. Schwartz (1995):** A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, 50, 789–819.
- Staub, M. (1998):** The term structure of interest rates and the swiss regional bank crisis: Empirical evidence and its limits. *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 134, 653–683.
- Wilson, T. C. (1997):** Measuring and managing credit portfolio risk. Working Paper McKinsey & Company, Zürich, Switzerland.