**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

Nr. 120

Mathematische Modellierung von Kredit- und Marktrisiken *)

von
PETER ALBRECHT

Erscheint in: Schierenbeck/Rolfes/Schüller (Hrsg.): Handbuch Bankcontrolling, 2. Aufl., Gabler Verlag, Wiesbaden

Mannheim 2000

1.- 03/2000 - 50

Mathematische Modellierung von Kredit- und Marktrisiken

Peter Albrecht, Universität Mannheim

1. Modellierung von Marktrisiken

1.1 Vorbemerkung

Unter die Kategorie der Marktrisiken einer bestimmten Finanzposition subsumieren wir allgemein alle Risiken, die aus der *Veränderung des Marktpreises* dieser Position über eine bestimmte Zeitperiode resultieren. Die Finanzposition kann dabei ein einzelner Finanztitel, eine Klasse von Finanztiteln (z.B. Aktien) oder aber ein beliebiges Portefeuille aus Finanztiteln sein. Entsprechend der betrachteten Klasse von Finanztiteln kann man etwa Aktienkursänderungsrisiken, Zinsänderungsrisiken, Währungsrisiken sowie Risiken aus derivativen Instrumenten (Forwards/Futures, Optionen, Swaps) unterscheiden. Die resultierenden Risiken hängen dabei von dem Unternehmen/der Institution ab, die die Finanzposition erworben (oder aber leerverkauft) hat, z.B. kann man die Marktrisiken im Handelsbereich einer Bank betrachten oder aber Marktrisiken im Finanzbereich eines Industrieunternehmens.

Die mathematische Modellierung von Marktrisiken umfaßt im Kern drei Problemkreise:

1) Die *Spezifikation eines* (diskreten oder zeitstetigen) *stochastischen Prozesses* für die Marktwertentwicklung der Finanzposition während der betrachteten Zeitperiode oder vereinfachend die *Spezifikation einer Wahrscheinlichkeitsverteilung* für die Änderung des Marktwertes über die betrachtete Zeitperiode. Diese Spezifikation kann für die betrachtete Finanzposition insgesamt direkt erfolgen oder aber – wenn die Position aus einzelnen Teilpositionen besteht – parallel für alle Teilpositionen (ggf. inkl. deren Abhängigkeiten). Letzteres führt zu einem multivariaten stochastischen Prozeß bzw. zu einer multivariaten Verteilung. Möchte man z.B. die Marktwertänderung der Finanzposition explizit als Funktion der Marktwertänderung ihrer Teilpositionen bestimmen, so führt dies auf die Problemstellung der *Aggregation* von Finanzpositionen. Eine andere Problemstellung besteht etwa darin, die Verteilung einer Finanzposition auf der Grundlage der Spezifizierung von zentralen Einflußgrößen (Faktoren) auf diese Finanzposition zu bestimmen.

2) Die Spezifikation eines *Risikomaßes*, einer Meßgröße für das Ausmaß des resultierenden (Markt)-Risikos.

3) Die *Risikoevaluation*, gegeben die Spezifikation des Risikomaßes und der Zufallsgesetzmäßigkeit der Marktwertentwicklung der Finanzposition.

Die konkrete Ausgestaltung der Umsetzung der vorstehenden Problemstellungen ist dabei noch entscheidend abhängig vom *Evaluationszweck*. Solche Evaluationszwecke können sein das Pricing von Risiken, das Hedging von Risiken, die Unterlegung von Risiken mit Kapital, das Setzen von Risikolimits oder die risikoadjustierte Performancesteuerung.

Im weiteren soll zunächst ein (jeweils sehr knapper) Überblick über die vorstehend genannten Problemkreise gegeben werden, wobei die Value-at-Risk-Thematik – auch hinsichtlich der Literaturhinweise – den notwendigen Focus darstellt.

1.2 Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Marktwertentwicklung

Wir wenden uns zunächst dem Gebiet der Modellierung von Aktienkursen P_t im Zeitablauf zu. Im Rahmen von Ein-Periodenmodellen ist dabei die *Normalverteilung* die Basis-Zufallsgesetzmäßigkeit für diskrete Renditen

$$R_{t+1} = (P_{t+1} - P_t) / P_t \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{1}$$

bzw. für zeitstetige Renditen $R_{t+1} = \ln(P_{t+1} / P_t)$. Die absoluten Kurse P_t sind entsprechend normal- bzw. logarithmisch normalverteilt. Allgemeinere Ein-Periodenmodelle versuchen primär, die Abweichungen empirischer Aktienrenditen von der Normalverteilung (z.B. „fat tails") zu erfassen.

Im Rahmen von diskreten stochastischen Prozessen (Zeitreihen) ist das Standardmodell der *Random Walk*, angewendet entweder auf die absoluten Preisdifferenzen P_{t+1}-P_t oder die logarithmierten Preise. Der Random Walk beinhaltet in seiner Basisform unabhängig und identisch verteilte Änderungen der (logarithmierten) Kurse und wird oftmals mit einer Normalverteilungsannahme verbunden. Entsprechend konzentrieren sich Verallgemeinerungen auf die Verteilungsannahme, die Annahme der Stationarität (z.B. Mean Reversion) sowie die Modellierung der Volatilitäts- und Autokorrelationsentwicklung (z.B. ARCH-, GARCH-Modelle).

Im Rahmen von zeitstetigen Modellen sind die arithmetische bzw. geometrische *Brownsche Bewegung* (Wiener Prozeß) die Standardmodelle, die wiederum auf unabhängige und identisch normalverteilte (logarithmierte) Kurszuwächse führen. Entsprechende Verallgemeinerungen bestehen im Ansatz allgemeinerer *Diffusionsprozesse* (insbesondere beinhaltet dies stetige Pfade), z.B. Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse, oder von *Lévy-Prozessen* (auch nicht-stetige Pfade möglich).

Neben eine direkte Modellierung von Aktienkursen treten Möglichkeiten der Modellierung der Einflüsse von erklärenden Variablen auf die Kurse (*Single-/Multi-Indexmodelle,* *Multi-Faktoren-Modelle, Dividenden-Diskontierungsmodelle, Kointegrations- und Fehlerkorrekturmodelle*).

Schließlich gelangt man durch die Verbindung der Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit von Aktienrenditen mit Annahmen eines Kapitalmarkts im Gleichgewicht (*Gleichgewichtsmodelle, No Arbitrage-Ansätze*) über die rein mathematisch/statistisch/ökonometrische Modellierung von Aktienkursverläufen hinaus zu ökonomisch/kapitalmarkttheoretisch basierten Modellen (CAPM, Arbitrage Pricing Theorie) von Aktienkursverläufen.

Wenden wir uns nun dem Bereich der Modellierung von Zinstiteln zu. Hier steht das *Barwertkonzept* zur Bestimmung von Marktpreisen im Vordergrund. Auf der Grundlage von deterministisch oder stochastisch modellierten Entwicklungen der fristigkeitsabhängigen Zinssätze (Spot Rates), d.h. der Modellierung der *Zinsstruktur* und ihrer zeitlichen Entwicklung, kann man entsprechend die Kursentwicklung von Zinstiteln/Zinstitelportefeuilles ableiten. Eine zentrale Rolle spielt in diesem Bereich die Analyse von Zinsänderungsrisiken, d.h. die Auswirkungen der Änderungen der Zinsstruktur auf die Bar- und Endwerte von Zinstiteln. Im Bereich der deterministischen Modellierung der Zinsstruktur führt dies insbesondere zu linearen bzw. quadratischen Approximationen der Barwertänderung auf der Basis von *Durations-* bzw. *Konvexitätsanalysen*.

Eine einfache Erweiterung des deterministischen Modellierungsansatzes einer (lokalen) linearen Approximation der relativen Barwertänderung

$$(P_{t+1} - P_t) / P_t \approx - D_M \, (r_{t+1} - r_t) \qquad (2)$$

auf der Basis der modifizierten Duration D_M und der zeitlichen Änderung des deterministischen fristigkeitsunabhängigen Zinssatzes r erfolgt auf der Basis der Normalverteilungsannahme für $\Delta_r = r_{t+1} - r_t$. Dies führt zu einer (lokalen) linearen Approximation der Barwertänderung im Rahmen eines einfachen stochastischen Ansatzes.

Wie im Falle von Aktienkursentwicklungen lassen sich auch die Entwicklung der Preise von Zinstiteln bzw. der Zinsstrukturkurve auf die Entwicklung von exogenen Einflußgrößen zurückführen (z.B.: *Faktorenmodelle*).

Abschließend gehen wir noch kurz auf den Bereich der Derivate ein. Hier läßt sich die Preisbildung auf die Kursentwicklung der zugrunde liegenden Basistitel zurückführen (*Cost-of-Carry-Ansatz* für Forwards/Futures, *Optionspreistheorie* für Optionen, Bewertung von Swaps analog zu der Bewertung von Zinstiteln). Entsprechend lassen sich Preisänderungen bei Derivaten bei gegebenem Bewertungsmodell auf die Preisänderungen des Basistitels zurückführen. Als Illustration betrachten wir die *Delta-Approximation* der Wertänderung $C_{t+1} - C_t$ einer Call-Option relativ zur Kursänderung $P_{t+1} - P_t$ des Basistitels:

$$C_{t+1} - C_t \approx \Delta \, (P_{t+1} - P_t) \, . \qquad (3)$$

Dabei entspricht das Optionsdelta der ersten Ableitung des (auf der Grundlage eines Optionspreismodells bestimmten) Call-Wertes nach dem Kurs des Basistitels, $\Delta = \partial C / \partial P$. Diese Vorgehensweise führt zu einer (lokalen) linearen Approximation der Änderung des Optionspreises relativ zur Preisänderung des Basisobjektes.

1.3 Spezifikation eines Risikomaßes

Das traditionelle Risikomaß der Kapitalmarkttheorie stellt die *Varianz* bzw. die Quadratwurzel hieraus, die *Standardabweichung* der Werte(bzw. Rendite-)entwicklung dar. Die Varianz bzw. Standardabweichung sind Volatilitätsmaße, sie quantifizieren das Ausmaß der Schwankungen der Wertentwicklung um die mittlere Entwicklung. Im Gegensatz zu Volatititätsmaßen erfassen *Shortfall*- bzw. *Downside-Risikomaße* nur das Verlustpotential im Sinne einer Unterschreitung der mittleren Wertentwicklung bzw. eines alternativen Targets (z.B. Mindest-Renditeerfordernisse des Investors). Shortfall-Maße sind Volatilitätsmaßen dann als Risikomaße vorzuziehen, wenn Verlust- und Chancenpotential nicht symmetrisch verteilt sind, beispielsweise ist dies bei Optionspositionen vielfach der Fall. Einfache Shortfall-Maße sind die Shortfall-Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung des Targets), der Shortfall-Erwartungswert (mittlere Höhe der Unterschreitung des Targets) und die Shortfall-Standardabweichung (Standardabweichung der Unterschreitung des Targets). Zu unterscheiden sind unbedingte Shortfall-Maße von bedingten Shortfall-Maßen. Letztere messen das Risikopotential nur auf der Grundlage derjenigen Realisationen, die zu einer Unterschreitung des Targets führen. Ein Beispiel ist der bedingte Shortfall-Erwartungswert oder *Tail Conditional Expectation* (TCE). Er mißt die mittlere Shortfall-Höhe, gegeben den Eintritt des Shortfalls. Der TCE ist ein Maß, das im Rahmen der Extremwerttheorie eine wichtige Rolle spielt, es ist ein statistisches Maß für das Worst-Case-Risiko. Zudem besitzt der TCE besondere Güteeigenschaften (*Kohärenz*) im Sinne des Axiomensystems von Artzner et al. (1999).

Alternative Risikomaße stellen die *Quantile* einer Verteilung dar. Dies sind diejenigen Werte einer Verteilung, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z.B. 1 %, 5 %) nicht unterschritten werden. Shortfall-Wahrscheinlichkeit und Quantile sind somit Risikomaße, die in einer direkten Beziehung zueinander stehen. Ein Quantil-Risikomaß von zentraler Bedeutung im Zusammenhang mit der Risikosteuerung (insbesondere der Kapitalunterlegung von Risiken) von Banken ist der *Value-at-Risk*. Formal ist der Value-at-Risk einer Finanzposition zum Konfidenzniveau $0 < \alpha < 1$ über einen Zeitraum der Länge u definiert durch

$$P(\Delta V_u \geq VaR) = \alpha. \tag{4}$$

Dabei entspricht $\Delta V_u = v_t - V_{t+u}$ der potentiellen Verlusthöhe der Finanzposition über ein bestimmtes Zeitintervall der Länge u. Der Value-at-Risk zum Konfidenzniveau α ist somit diejenige Ausprägung der Verlusthöhe, die mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht unterschritten wird. Interpretiert man den VaR als Höhe eines zu unterlegenden Kapitals, dann besagt (4), daß die Wahrscheinlichkeit der Aufzehrung dieses Kapitals durch ein negatives Investmentergebnis kontrolliert klein ist. Folgt die Rendite der Finanzposition einer Normalverteilung mit über den Zeitraum der Länge u als konstant angenommenen Parametern μ und σ, so ergibt sich für den Value-at-Risk der explizite Ausdruck

$$VaR = v_t \, N_{1-\alpha} \, \sigma - v_t \, \mu \quad , \qquad (5)$$

wobei $N_{1-\alpha}$ das (1-α)-Quantil der Standard-Normalverteilung bedeute, d.h. derjenige Wert der Standard-Normalverteilung, der exakt in nur 100 α % der Fälle überschritten wird. Nimmt man an, daß die mittlere Rendite μ über das betrachtete Zeitintervall gleich null ist, so verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (5) und der Value-at-Risk wird proportional zu dem Risikomaß Standardabweichung.

Die bislang diskutierten Risikomaße waren statistische Risikomaße in dem Sinne, daß in ihre Berechnung sowohl Eintrittshöhen als auch Eintrittswahrscheinlichkeiten der zugrunde liegenden Wertentwicklung eingehen. Alternativ bzw. ergänzend kann man Risikomaße betrachten, die auf den unter Annahme bestimmter besonders ungünstiger Szenarien (Worst-Case-Szenarien, Stress-Szenarien) resultierenden Wertentwicklungen beruhen.

1.4 Verfahren der Risikoevaluation

Unter Vorgabe eines Risikomaßes und einer vollständigen Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Wertentwicklung (inkl. der Bestimmung der Parameter auf der Basis empirischer Daten) kann zunächst versucht werden, die numerische Ausprägung des Risikomaßes in *analytisch geschlossener* Form exakt oder unter Verwendung *analytischer Approximationsverfahren* approximativ zu berechnen. Ist dies nicht möglich, so kann man alternativ auf der Grundlage einer vollständig spezifizierten Zufallsgesetzmäßigkeit entsprechende Realisationen der betrachteten Wertentwicklung im Wege einer *Monte-Carlo-Simulation* generieren und pro Simulation eine Ausprägung des zu evaluierenden Risikomaßes gewinnen. Auf der Basis „genügend vieler“ Simulationen läßt sich so eine durchschnittliche Ausprägung gewinnen, die eine Approximation der gesuchten wahren Größe darstellt.

Analytische Evaluation und Monte Carlo-Simulation erfordern jeweils eine vollständige Spezifikation der zugrunde liegenden Zufallsgesetzmäßigkeit (parametrischer Ansatz). Im Falle von Quantilberechnungen (inkl. Value-at-Risk) ist nur der untere bzw. obere Randbereich der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Bedeutung. Mit Verfahren der *Extremwerttheorie* läßt sich dieser Verteilungsbereich durch eine Grenzverteilung (z.B. verallgemeinerte Pareto-Verteilung) approximieren. und die entsprechende Quantilgröße bestimmen (semi-parametrischer Ansatz). Gänzlich ohne Annahmen über die zugrunde liegende Zufallsgesetzmäßigkeit kommt die „*historische Simulation*“ aus, bei der die interessierenden Größen rein auf der Basis der in der Vergangenheit beobachteten Realisationen (die als aus einer unabhängig und identisch verteilten Zufallsgesetzmäßigkeit entstammend angenommen werden) der betreffenden Finanzposition gewonnen werden. Bei nicht genügend vielen (unabhängigen) Realisationen eröffnet das *Bootstrapping*-Verfahren eine Möglichkeit der Erhöhung des Stichprobenumfangs.

1.5 VaR-Berechnung: Die Delta-Normal-Methode

Besteht die zu evaluierende Finanzposition aus einer Vielzahl heterogener Einzelpositionen, deren Einfluß (inkl. Interaktionen) auf die Gesamtposition explizit erfaßt werden soll, so stellt sich das Problem der Aggregation der Zufallsgesetzmäßigkeiten der Einzelpositionen. Dies gelingt problemlos und in einfacher Form (*lineare Aggregation*) nur unter starken Restriktionen an die zugelassenen Zufallsgesetzmäßigkeiten, so daß eine Vielzahl der in Abschnitt 1.2 erwähnten Ansätze für einzelne Klassen von Finanzpositionen für diese Problemstellung nicht verwendet werden können. Es soll deshalb abschließend am Beispiel der Value-at-Risk Berechnung für eine solche gesamthafte Finanzposition dargestellt werden, wie die genannte Problemdarstellung (approximativ) einer Lösung zugeführt werden kann.

Sind die in die Aggregation eingehenden Finanzpositionen (i = 1, ..., n) multivariat normalverteilt mit über die betrachtete Zeitperiode jeweils konstanten Erwartungswerten μ_i bzw. Varianzen σ_i^2 sowie Korrelationskoeffizienten ρ_{ij}, so ist die Gesamtposition normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ und Varianz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$.

Aus (5) ergibt sich damit für den Value-at-Risk der Gesamtposition

$$VaR_\alpha(u) = N_{1-\alpha} \sum_{i=1} \sum_{j=1} v_{it} v_{jt} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1} v_{it} \mu_i , \qquad (6)$$

wobei v_{it} dem Wert der i-ten Finanzposition am Anfang der betrachteten Zeitperiode entspreche.

Die Zurückführung der Gesamtposition auf die der Beziehung (6) zugrunde liegenden Konstellation erfordert i.d.R. die Vorschaltung des Verfahrens des sog. *Mappings* sowie die *Linearisierung nicht-linearer Preisänderungen*. Im Rahmen des Mappings, dem zentralen Baustein z.B. der Risk Metrics-Methodik, werden die in einem Portefeuille enthaltenen Finanztitel in ihre Grundbausteine zerlegt und diese dann mittels Sensitivitätsmaßen standardisierten Assets (*Risikofaktoren*) zugeordnet. Beispiele für die Linearisierung von nicht-linearen Preisänderungen haben wir bereits unter (2) sowie (3) kennengelernt. Zur Bestimmung des Value-at-Risk werden nun nur noch die eingehenden Parameter, insbesondere eine Schätzung für die *Varianz/Kovarianz-Matrix* benötigt.

Verallgemeinerungen dieser Vorgehensweise bestehen in der Vornahme einer *quadratischen Approximation* anstelle einer linearen Approximation (Delta-Gamma-Normalverfahren) sowie Verbesserungen hinsichtlich der Erfassung der einzelnen Instrumente. An dieser Stelle kann dabei nur auf die Literatur verwiesen werden. Das Literaturverzeichnis enthält hierzu eine Reihe von ausgewählten Hinweisen.

2. Modellierung von Kreditrisiken

2.1 Vorbemerkungen

Unter die Kategorie der Kreditrisiken, die aus einer bestimmten Finanzposition resultieren, subsumieren wir alle Risiken, die zu einer Wertänderung der Finanzposition, bedingt durch eine Änderung der „*Kreditqualität*“ der Finanzposition, beruhen. Die Änderung der Kreditqualität besteht typischerweise in einer *Bonitätsänderung* (Kreditmigration). Als bedeutsamer Extremfall einer Bonitätsänderung ist dabei der *Ausfall der Position* zu sehen. Beispiele für eine Änderung der Kreditqualität sind Unternehmensanleihen, deren Wertentwicklung von der Bonität des Emittenten abhängt auf der einen Seite und (Over-the-Counter-)Derivate, deren Wert durch den Ausfall der Gegenpartei bedroht ist (ohne daß der Basistitel der Option seine Kreditqualität ändern muß), auf der anderen Seite.

Die Strukturierung der Problemkreise im Zusammenhang mit der Modellierung von Kreditrisiken gestaltet sich vollständig analog zu dem in 1.1 behandelten Fall der Marktrisiken. Es hat eine Spezifikation der Wertentwicklung („*Kreditrisikoprozeß*“) der Finanzposition unter Berücksichtigung von Bonitäts- und Ausfallrisiken der Gegenpartei zu erfolgen, geeignete Risikomaße sind zum Einsatz zu bringen und es hat eine Risikoevaluation zu erfolgen. Auch die Modellierungszwecke (z.B. Pricing, Kapitalunterlegung) bleiben unverändert. Da der zentrale Unterschied – neben dem relevanten Zeithorizont, der im Falle von Kreditrisiken typischerweise sehr viel länger ist als im Falle von Marktrisiken – im Bereich der Modellierung der Wertentwicklung liegt, konzentrieren wir uns im weiteren auf diesen Aspekt Die anderen genannten Problemkreise können weitgehend analog zu den Ausführungen in Abschnitt 1 behandelt werden.

2.2 Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit des Kreditrisikoprozesses

Die Modellierung des Kreditrisikoprozesses umfaßt zwei zentrale Komponenten, die Modellierung des *Kreditqualitätsprozesses* (Ereignisrisiko) auf der einen Seite sowie die Modellierung des *Ausfallexposures* (Volumenrisiko) auf der anderen. Verfahren zur Analyse des Kreditrisikoprozesses unterliegen dabei einer großen Modell- und Methodenvielfalt. Für die Zwecke dieser Arbeit unterscheiden wir im folgenden – nicht gänzlich frei von Überschneidungen – *Firmenwertmodelle*, Ansätze mit *exogener Modellierung des Kreditqualitätsprozesses* sowie *Portfolio-Modelle*.

Im Rahmen der in ihrer Grundform auf Merton (1974) zurückgehenden Unternehmenswertmodelle (firm value models), auch als Diffusions- oder Contingent Claims-Modelle bezeichnet, wird der „Wert der Schulden" eines Kreditgebers als Wert einer Put-Option auf die Vermögenswerte (Asset Values) des Unternehmens mit einem Ausübungspreis in Höhe des Nominalwertes der Schulden (Liabilities) interpretiert. Damit können Resultate der Optionspreistheorie benutzt werden, um Anleihen in Abhängigkeit von der Kreditqualität des Emittenten zu bewerten. Das Basismodell von Merton hat viele Erweiterungen (z.B. stochastische Zinsraten) erfahren, Variationen dieses Ansatzes erlauben das Pricing von ausfallbedrohten Optionen und Swaps ebenso wie das von Kreditderivaten. Vorteile dieses Ansatzes sind seine Konsistenz mit den Bedingungen arbitragefreier Märkte, Probleme bestehen bei seiner praktischen Implementation.

Die Kreditqualität, insbesondere die Ausfallwahrscheinlichkeit, sind bei Firmenwertmodellen endogene Größen. Im Rahmen von Modellen mit exogener Modellierung des Kreditqualitätsprozesses wird dieser als exogener Prozeß betrachtet. Relevante Größen wie Ausfallwahrscheinlichkeiten oder Migrationswahrscheinlichkeiten werden aufgrund statistischer Daten, gegebenenfalls unter Heranziehung von weiteren erklärenden Variablen (Regressionsansätze) bestimmt. In voller modelltheoretischer Spezifikation werden *zeitinhomogene Markovketten* (zeitabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten) mit endlich vielen Zuständen, die den möglichen Rating-Klassen entsprechen, betrachtet und statistisch identifiziert. Hieraus können interessierende Größen, wie die Zufallsgesetzmäßigkeit der Ausfallszeit oder die Ausfallwahrscheinlichkeit, abgeleitet werden. Eine Variation dieser Ansätze (die Basis ist üblicherweise eine „*Poissonapproximation*") besteht darin, die Ausfallintensität direkt oder als Funktion exogener Variablen zu modellieren.

Unter die Ansätze mit einer exogenen Modellierung des Kreditqualitätsprozesses sind Verfahren zu einem Pricing von ausfallrisikobehafteten Anleihen bzw. ausfallbedrohten derivativen Instrumenten bzw. der Struktur risikobehafteter Zinssätze ebenso zu subsumieren, z.B. Jarrow/Turnbull (1995), Jarrow/Lando/Turnbull (1997), Duffie/Singleton (1997), wie Ansätze im Rahmen des Kreditrisikomanagements, z.B. der Kapitalunterlegung von Risiken, wie z.B. Iben/Brotherton-Ratcliffe (1994). Während bei Pricingmodellen die Konsistenz zur Bedingung arbitragefreier Märkte gewährleistet ist und auch das Ausfallexposure von der Kreditqualität abhängig ist (Marktwerte in Abhängigkeit des Kreditrisikos), ist dies bei den letzteren Ansätzen nur teilweise, beispielsweise bei Barth (2000), gewährleistet. In der Regel werden z.B. die Ausfallwahrscheinlichkeiten primär nur unter Berücksichtigung statistischer Aspekte identifiziert und der Kontraktwert bei Ausfall unabhängig vom Ausfallprozeß angesetzt. Bei beiden Ansätzen geht in der Regel die kritische Annahme ein, daß Ausfallwahrscheinlichkeiten und Zinsraten unabhängig voneinander sind, d.h. eine Unabhängigkeit von Kredit- und Marktrisiken wird unterstellt. Das/Tufano (1996) im Bereich von Pricingmodellen und Barth (2000) im Bereich von Risikomanagementmodellen stellen erste Ansätze dar, diese Trennung graduell aufzuheben.

Wie im Bereich der Modellierung von Marktrisiken, vgl. Abschnitt 1.5, besteht auch im Bereich der Modellierung von Kreditrisiken bei Finanzpositionen, die aus einer Vielzahl heterogener Einzelpositionen bestehen, das Problem der Aggregation. Im Zusammenhang mit der Kapitalunterlegung von Kreditrisiken (*Credit Value-at-Risk*) sind vor diesem spezifischen Hintergrund Tools entwickelt worden, bei denen der Portfolio-Ansatz und das Primat einer praktischen Implementierbarkeit im Vordergrund stehen. Bekannte Tools sind Credit Metrics^{TM} von J.P. Morgan, Credit Portfolio View^{TM} von McKinsey & Company sowie Credit Risk^{+} von Credit Suisse Financial Products. Eine auch nur kursorische Darstellung dieser Tools würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen, so daß wir an dieser Stelle auf die Literatur verweisen müssen, insbesondere auf die vergleichenden Darstellungen in Henn/Wegmann (1998), Wilson (1998) und Barth (2000).

Literatur

ALBRECHT, P. (1998): Stochastische Ansätze zur Quantifizierung des Ausfallrisikos von OTC-Finanzderivaten, Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Vol. 7, S. 359 – 370.

ALBRECHT, P., A. KÖNIG, R. MAURER (1996): An actuarial approach to determine the required capital for portfolios of options subject to credit risk, in: ALBRECHT, P. (Hrsg.): Aktuarielle Ansätze für Finanz-Risiken, Band I, Karlsruhe, S. 25 – 39.

ALBRECHT, P., R. MAURER, M. MÖLLER (1998): Shortfall-Risiko / Excess-Chance-Entscheidungskalküle, Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 118, S. 249 – 274.

ALEXANDER, C. (1998): Volatility and Correlation: Measurement, Models and Applications, in: ALEXANDER C. (Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Chichester u.a., S. 125 – 171.

ALTMAN, E.I., A. SAUNDERS (1998): Credit risk measurement: Development over the last 20 years, Journal of Banking and Finance 21, S. 1721 – 1742.

ALTMAN, E.I. (1989): Measuring Corporate Bond Mortality and Performance, Journal of Finance 44, S. 909 – 921.

AMMANN, M. (1999): Pricing Derivate Credit Risk, Berlin u.a.

ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER, D. HEATH (1999): Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance 9, S. 203 – 228.

ARVANITIS, A., J. GREGORY, J.-P. LAURENT (1999): Building Models for Credit Spreads, Journal of Derivatives, Spring 1999, S. 27 – 43.

BARNDORFF-NIELSEN, O. (1998): Processes of normal inverse Gaussian type, Finance and Stochastics 2, S. 41 – 68.

BARTH, J. (2000): Worst-Case Analysen des Ausfallrisikos von Finanzderivaten unter Berücksichtigung von Markteinflüssen, Hamburg.

BROADIE, M., P. GLASSERMAN (1998): Simulation for Option Pricing and Risk Management, in: ALEXANDER, C. (Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Chichester u.a., S. 173 – 207.

BÜHLER, W., O. KORN, A. SCHMIDT (1998): Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“, Die Betriebswirtschaft 58, S. 64 – 85.

COSSIN, D. (1997): Credit Risk Pricing: A Literature Survey, Finanzmarkt und Portfolio Management 11, S. 398 – 412.

DAS, S.R., P. TUFANO (1996): Pricing Credit-Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic, Journal of Financial Engineering 5, S. 161 – 198.

DUFFEE, G.R. (1996): On measuring credit risks of derivative instruments, Journal of Banking and Finance 20, S. 805 – 833.

DUFFEE, G.R. (1999): Estimating the Price of Default Risk, Review of Financial Studies 12, S. 197 – 226.

DUFFIE, D., J. PAN (1997): An Overview of Value at Risk, Journal of Derivatives, Spring 1997, S. 7 – 49.

DUFFIE, D., K.J. SINGLETON (1997): An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields, Journal of Finance 52, S. 1287 – 1321.

EL-JAHEL, L., W. PERRAUDIN, P. SELLIN (1999): Value at Risk for Derivatives, Journal of Derivatives, Spring 1999, S. 7 – 26.

EMBRECHTS, P., C. KLÜPPELBERG, T. MIKOSCH (1997): Modelling Extremal Events, Berlin u.a.

EMBRECHTS, P., S. RESNICK, R. SAMORODNITSKY (1999): Extreme Value Theory as a Risk Management Tool, North American Actuarial Journal 3, S. 30 – 41.

FONS, J.S. (1994): Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk, Financial Analysts' Journal, September/October 1994, S. 25 – 32

HARASTY, H., J. ROULET (2000): Modeling Stock Market Returns, Journal of Portfolio Management, Winter 2000, S. 33 – 46.

HENN, J., P. WEGMANN (1998): Aktuell in wissenschaftlichen Zeitschriften: Kreditrisikomanagement, Finanzmarkt und Portfolio Management 12, S. 95 – 101.

HO, T.S.Y., M.Z.H. CHEN, F.H.T. ENG (1996): VAR Analytics: Portfolio Structure, Key Rate Convexities, and VAR Betas, Journal of Portfolio Management, Fall 1996, S. 89 – 98.

IBEN, B., R. BROTHERTON-RATCLIFFE (1994): Credit Loss Distributions and Required Capital for Derivative Portfolios, Journal of Fixed Income 4, June 1994, S. 6 – 14.

JARROW, R.A., D. LANDO, S.M. TURNBULL (1997): A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, Review of Financial Studies 10, S. 481 – 523.

JARROW, R., S. TURNBULL (1998): Credit Risk, in: Alexander, C. (Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Chichester u.a., S. 237 – 254.

JARROW, R., S. TURNBULL (1995): Pricing options on financial securities subject to default risk, Journal of Finance 50, S. 53 – 86.

JOHANNING, L. (1998): Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation, Bd. Soden/Taunus.

JORION, P. (1997): Value at risk, Chicago u.a.

KIJIMA, M., K. KOMORIBAYASHI (1998): A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives, Journal of Derivatives, Fall 1998, S. 97 – 108.

KLAUS, M. (1997): Die Value-at-Risk-Berechnung für Optionen – praktische Probleme nicht-linearer Produkte, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen 50, S. 375 – 379.

KROPP, M. (1999): Management und Controlling finanzwirtschaftlicher Risikopositionen, Bd. Soden/Taunus.

LISTER, M. (1997): Risikoadjustierte Ergebnismessung und Risikokapitalallokation, Frankfurt/Main.

LITTERMAN, R., T. IBEN (1991): Corporate Bond Valuation, and the Term Structure of Credit Spreads, Journal of Portfolio Management 17, S. 52 – 64.

MERTON, R.C. (1974): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, Journal of Finance 29, S. 449 – 470.

O'CONNOR, R. J.F. GOLDEN, R. BECK (1999): A Value-at-Risk Calculation of Required Reserves for Credit Risk in Corporate Lending Portfolios, North American Actuarial Journal 3, S. 72 – 83.

OVERBECK, L., G. STAHL (1998): Stochastische Modelle im Risikomanagement des Kreditportfolios, in: OEHLER, A.. (Hrsg.): Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen, Stuttgart, S. 77 – 110.

ROLSKI, T., H. SCHMIDLI, V. SCHMIDT, J. TEUGELS (1999): Stochastic Processes for Insurance and Finance, Chichester u.a.

SORENSEN, E.H., T.F. BOLLIER (1994): Pricing Swap Default Risk, Financial Analysts' Journal, May-June 1994, S. 23 – 33.

TOBLER, J., R. WALDER (1998): Die Modellierung von Zinsrisikofaktoren in einem Value-at-Risk-Modell, Finanzmarkt und Portfolio Management 12, S. 342 – 370.

WILSON, T.C. (1998): Value at Risk, in: ALEXANDER, C. (Hrsg.): Risk Management and Analysis, Vol. 1, Chichester et al., S. 61 – 124.

WIRCH, J.L., M.R. HARDY (1999): A Synthesis of Risk Measures for Capital Adequacy, Insurance: Mathematics and Economics 25, S. 337 – 347.