

# Parameteruntersuchungen an Dirac-Modellen

Inauguraldissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Universität Mannheim

vorgelegt von  
Diplom-Physiker Torsten Thumstädter  
aus Großburgwedel

Mannheim, 2003

Dekan: Professor Dr. Herbert Popp, Universität Mannheim  
Referent: Professor Dr. Ernst Binz, Universität Mannheim  
Koreferent: Privatdozent Dr. Jürgen Tolksdorf, Universität Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 19 März 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>1 Mathematische Grundbegriffe</b>	<b>10</b>
1.1 Vektorbündel . . . . .	10
1.2 Prinzipal- & Assoziierte Bündel . . . . .	15
1.3 Clifford-Modulbündel . . . . .	17
1.3.1 Clifford-Algebren & Clifford-Module . . . . .	17
1.3.2 Clifford-Bündel & Clifford-Modulbündel . . . . .	23
1.3.3 Clifford-Zusammenhänge . . . . .	24
1.4 Dirac-Operatoren und Clifford-Modulbündel . . . . .	27
<b>2 Die Lichnerowicz-Zerlegung</b>	<b>32</b>
<b>3 Wirkungsfunktionale</b>	<b>38</b>
3.1 Dirac-Operatoren auf Fermion-Bündeln . . . . .	38
3.2 Wirkungs-Funktionale & Dirac-Modelle . . . . .	42
<b>4 Das Standardmodell als Dirac-Modell</b>	<b>50</b>
<b>5 Physikalische Konsequenzen der Parameterbeziehungen</b>	<b>59</b>
5.1 Normierung und einfache Konsequenzen . . . . .	59
5.2 Einfluss von Quanten-Korrekturen . . . . .	62
5.2.1 Renormierungsgruppengleichungen . . . . .	62
5.2.2 Einfluss der Quanten-Korrekturen auf die Parameterbe- ziehungen im Dirac-Modell . . . . .	74
5.2.3 Stabilität und kritische Punkte . . . . .	75
5.3 Eigenschaften der Renormierungsgruppenflussgleichungen . . . . .	79
5.4 Renormierungsgruppengleichungen und die Higgs-Masse . . . . .	89
5.4.1 Parameterbeziehungen . . . . .	89
5.4.2 Bestimmung der Higgs-Masse mit Hilfe der Kopplungen $g_t$ und $\lambda$ . . . . .	91
<b>6 Vergleich mit anderen geometrischen Modellen</b>	<b>100</b>
6.1 Vergleich Chamseddine-Connes/DEHYMH . . . . .	100
6.1.1 Der Dirac-Operator des Chamseddine-Connes Modells . . . . .	101
6.1.2 Wirkungen . . . . .	102
6.1.3 Parameterbeziehungen im Chamseddine-Connes Modell . . . . .	104
6.1.4 Vergleich der Parameterbeziehungen . . . . .	105
6.1.5 Das Funktional $\text{Tr}f(\zeta \frac{D^2}{\Lambda^2})$ . . . . .	109

6.2	Vergleich Connes-Lott/DEHYMH . . . . .	114
6.2.1	Nichtkommutative Modelle . . . . .	114
6.2.2	Konsequenzen der Parameterbeziehungen . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung &amp; Konsequenzen</b>	<b>129</b>
7.1	Überblick . . . . .	129
7.2	Probleme & Abschließende Diskussion . . . . .	132
<b>A</b>	<b>Spur-Formel</b>	<b>134</b>
<b>B</b>	<b>Formel zu Zusammenhängen bei Spin-Mannigfaltigkeiten</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Elemente der gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>139</b>

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. Ernst Binz für die Übernahme der Betreuung und die Möglichkeit danken, an seinem Lehrstuhl zu promovieren.

Des Weiteren sei besonders herzlich Jürgen Tolksdorf gedankt, dem ich meine wesentlichen Einsichten in die Welt der Geometrie verdanke, und für dessen Hilfe, Ratschläge und konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit.

Auch sei Thomas Ackermann herzlich gedankt, dessen Vorlesungen und Erläuterungen mir doch so manchen tieferen Einblick in die mathematischen Zusammenhänge gewährten.

Danke auch an Marcus, dem unermüdlichen Korrekturleser, ohne den noch wesentlich mehr Fehler in dieser Arbeit wären.

Darüber hinaus danke ich allen anderen Angehörigen des Lehrstuhls I für Mathematik für die freundliche Unterstützung und die angenehme Atmosphäre.

Schließlich danke ich allerherzlichst Michèle, die mich immer wieder daran erinnert hat, dass es auch noch Dinge außerhalb der Mathematik gibt.

# Einleitung

Die moderne Teilchenphysik unterscheidet zwei fundamentale Klassen von Elementarteilchen: Die Fermionen und die Bosonen. Es werden dabei die Fermionen als die Konstituenten der Materie angesehen, während dagegen die Bosonen Wechselwirkungen vermitteln. Die heute bekannten Teilchenwechselwirkungen lassen sich im Rahmen von Yang-Mills-Theorien geometrisch verstehen. Die Fermionen werden dabei durch (getwistete) Spinor-Bündel modelliert, während die Bosonen, mit Ausnahme des so genannten Higgs-Bosons, sich als Eichpotentiale von auf diesem Bündel operierenden Zusammenhängen auffassen lassen. Dies lässt in gewissen Rahmen eine geometrische Interpretation der Wechselwirkungen in der Teilchenphysik zu. Allerdings stellt sich heraus, dass die Wechselwirkungen für das Higgs-Boson ad hoc eingeführt werden müssen. Diese Wechselwirkungen genügen zwar gewissen Symmetriprinzipien, lassen sich aber nicht direkt geometrisch interpretieren.

Ein Ansatz für ein besseres geometrisches Verständnis für Teilchenwechselwirkungen bieten Dirac-Modelle (s. [Ack], [Ack,Tol], [Tol], [Tol2]). In einem Dirac-Modell werden nun die Fermionen als die fundamentalen Objekte betrachtet, und man fordert, dass durch ihre Wechselwirkungen alle weiteren Wechselwirkungen festgelegt werden sollen. In der Teilchenphysik werden die Fermionwechselwirkungen durch Gleichungen von dem Typ

$$(D + \Phi)\psi = 0, \quad \psi \in \Gamma(\mathcal{E}) \quad (1)$$

beschrieben. Hierbei stellt  $D$  einen Dirac-Operator dar und  $\Phi$  einen vom Higgs-Boson induzierten Endomorphismus und  $\psi$  einen Schnitt in ein geeignetes getwistetes Spinor-Bündel. Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich  $\tilde{D} := D + \Phi$  als ein verallgemeinerter Dirac-Operator auffassen. Somit sind die Wechselwirkungen der Fermionen durch einen verallgemeinerten Dirac-Operator  $\tilde{D}$  bestimmt.

In einem Dirac-Modell werden nun zu einem verallgemeinerten Dirac-Operator  $\tilde{D}$  auf einem hermiteschen getwisteten Spinor-Bündel Funktionale

$$\mathcal{I}_F := \langle \psi, i\tilde{D}\psi \rangle, \quad \mathcal{I}_B := \text{res}_\zeta((\tilde{D})^{-2n+2}) \quad (2)$$

definiert, deren Variation die Gleichungen für die fermionischen und bosonischen Wechselwirkungen liefern. Hier ist  $\text{res}_\zeta$  ein so genanntes verallgemeinertes Residuum auf der Menge der Dirac-Operatoren, was aus dem Wodzicki-Residuum konstruiert ist.

Es zeigt sich nun, dass sich das Standardmodell der Elementarteilchenphysik, wenn man von einer euklidischen Raumzeit ausgeht, als ein Dirac-Modell formulieren lässt. Dabei zeigt dieser Zugang folgende interessante Aspekte:

- Bei den Funktionalen tritt für im bosonischen Teil der Wirkung ein zusätzlicher Term auf, der die Einstein-Hilbert-Wirkung der Gravitation beschreibt. Eine Wechselwirkung, die im konventionellen Zugang zum Standardmodell nicht auftritt.
- Bei der Identifikation der Modellparameter des Dirac-Modells mit denen des Standardmodells treten Beziehungen zwischen den physikalischen Kopplungen auf, die es im Standardmodell nicht gibt. Diese Beziehungen lassen sich unter anderem mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen dazu benutzen, die Masse des Higgs-Bosons zu bestimmen. Man erhält für den in dieser Arbeit verfolgten Ansatz den Wert:

$$m_H = 188 \pm 15 \text{ GeV.} \quad (3)$$

Im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik ist eine derartige Aussage nicht möglich. Hier lässt sich die Higgs-Masse mittels Überlegungen aus der Quantenfeldtheorie und experimenteller Untersuchungen nur auf das Intervall

$$[114, 193] \text{ GeV} \quad (4)$$

festlegen (s. [Ro]). Der Wert der Higgs-Masse im Dirac-Modell ist somit kompatibel mit den Schranken, die durch das Standardmodell gesetzt werden.

- Schließlich lässt dieser Zugang eine geometrische Interpretation des Higgs-Bosons zu. Denn es gilt, dass sich jeder verallgemeinerte Dirac-Operator auf einem Clifford-Modulbündel wie folgt darstellen lässt (s. [Ack], [Ack,Tol], [Tol2]):

$$\tilde{D} = c \circ \nabla, \quad (5)$$

wobei  $c$  die Clifford-Aktion und  $\nabla$  ein Zusammenhang auf dem unterliegenden Clifford-Modul-Bündel ist. Somit lässt sich zwar nicht das Higgs-Boson direkt, aber der durch ihn induzierte Endomorphismus  $\Phi$  als Teil eines Zusammenhangs verstehen.

Ein weiterer bemerkenswerter Punkt ist, dass die Dirac-Modelle eine gewisse Verwandtschaft mit Modellen der nichtkommutativen Geometrie aufweisen, insbesondere dem Connes-Lott- (s. [Co,Lo]) und dem Chamseddine-Connes-Modell (s. [Ch,Co], [Tol2]). Auch hier gibt es Beziehungen zwischen den physikalischen Kopplungen, die aber zu Widersprüchen führen (s. Kap. 7).

Die nachfolgende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im **ersten Kapitel** werden der geometrische Rahmen festgelegt und die grundlegenden Ergebnisse der Theorie der verallgemeinerten Dirac-Operatoren zusammengefasst. Dabei wird das Augenmerk auf den Umstand gelegt, dass zu jedem verallgemeinerten Dirac-Operator eine Clifford-Modul-Struktur korrespondiert. Dabei existieren grundsätzlich zwei verschiedene Typen von Clifford-Algebren, mit denen sich diese Strukturen konstruieren lassen. Der Unterschied liegt im Vorzeichen der erzeugenden Relation:

$$v^2 = \pm 1, \quad v \in V, \quad (6)$$

wobei  $V$  der zugrundeliegende (pseudo) euklidische Vektorraum ist, über dem die Clifford-Algebra konstruiert ist. Es zeigt sich, dass die Vorzeichenwahl auf

der rechten Seite auf die späteren Betrachtungen Auswirkungen hat. In diesem Abschnitt werden beide Fälle betrachtet.

Im **zweiten Kapitel** wird die Lichnerowicz-Zerlegung für das Quadrat eines verallgemeinerten Dirac-Operators  $\tilde{D}$  diskutiert. Es geht dabei um die Tatsache, dass sich  $\tilde{D}^2$  wie folgt zerlegen lässt:

$$\tilde{D}^2 = \Delta^\nabla + \mathcal{V}, \quad (7)$$

hier ist  $\Delta^\nabla$  ein Bochner- oder Zusammenhangs-Laplace-Operator und  $\mathcal{V}$  ein Differential-Operator nullter Ordnung. Für  $\mathcal{V}$  lassen sich explizite Formeln angeben. Es wird  $\mathcal{V}$  für den Fall der Clifford-Algebra vom Typ  $v^2 = 1$  diskutiert und mit den Ergebnis aus der Literatur [Ack,Tol] für den Fall  $v^2 = -1$  verglichen.

Das **dritte Kapitel** behandelt die Konstruktion der Wirkungsfunktionale von Dirac-Modellen. Hierfür werden unter anderem Dirac-Yukawa-, Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren und das verallgemeinerte Residuum  $\text{res}_\zeta$  eingeführt. Für den Fall eines Pauli-Dirac-Yukawa-Operators  $\tilde{D}$  wird  $\text{res}_\zeta(i\tilde{D})$  für den Fall der Clifford-Algebra  $v^2 = 1$  ausgewertet und mit den Ergebnissen für den Fall  $v^2 = -1$  verglichen (s. hierzu [Tol], [Tol2]). Es zeigt sich hierbei, dass das Verwenden der Clifford-Algebra ein durch die physikalische Interpretation bedingtes Vorzeichenproblem löst (s. [Tol]).

Im **vierten Kapitel** werden die geometrischen Daten angegeben, die es erlauben, das Standardmodell als ein Dirac-Modell zu beschreiben. Es werden dabei zwei Versionen diskutiert: Einmal ohne und einmal mit rechthändigen Neutrinos. Die letztgenannte Version erlaubt die Konstruktion einer Theorie mit massiven Neutrinos. Für beide Modelltypen werden die Parameterbeziehungen zwischen den physikalischen Kopplungen und den Modellparametern bestimmt.

Das **fünfte Kapitel** beschäftigt sich mit den physikalischen Konsequenzen der Parameterbeziehungen die im Kapitel vier bestimmt wurden. Es zeigt sich, dass die Verhältnisse der Yang-Mills-Kopplungen und das Quadrat des Sinus des elektroschwachen Winkels beschränkt sind. Dieses Phänomen existiert bei der konventionellen Beschreibung des Standardmodells nicht. Des Weiteren wird mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen, die im hier betrachteten Fall Quanten-Korrekturen in der 1-Loop-Ordnung beschreiben, die Higgs-Masse bestimmt und der zugehörige Fehler abgeschätzt. Auch diese Untersuchung ist im Rahmen des Standardmodells nicht möglich.

Im **sechsten Kapitel** folgt ein Vergleich der Ergebnisse des fünften Kapitels mit den Ergebnissen entsprechender Untersuchungen im Rahmen des Connes-Lott- und des Chamseddine-Connes-Modells (s. [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch]). Hier zeigt sich, dass es im Connes-Lott- wie auch im Chamseddine-Connes-Modell Beziehungen zwischen den Modellparametern und den physikalischen Kopplungen gibt. Es stellt sich dabei heraus, dass diese Parameterbeziehungen, wenn man das Standardmodell beschreibt, im Chamseddine-Connes- und in Dirac-Modell sehr ähnlich sind. Diese Ähnlichkeiten lassen sich durch Untersuchung der zur Bestimmung der Parameterbeziehungen verwendeten Funktionale nachvollziehen. Beim Chamseddine-Connes-Modell wird zur Definition des bosonischen Wirkungsfunktionals, ein Funktional der Form

$$\text{Tr} f \left( \zeta \frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2} \right) \quad (8)$$



verwendet (s. [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch]). Es handelt sich hierbei um eine modifizierte Operatorspur über den verallgemeinerten Dirac-Operator  $\mathcal{D}$ . Es zeigt sich, dass dieses Funktional nicht die Parameterbeziehungen erzeugt, die bei den Untersuchungen in den Arbeiten [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch] verwendet wurden. Es wird ein alternatives Funktional angegeben, das die verwendeten Parameterbeziehungen generiert. Allerdings stellt sich heraus, dass beide Funktionale zu numerischen Inkonsistenzen führen. Im Connes-Lott-Modell findet man, dass sich die Parameterbeziehungen und damit auch die daraus abgeleiteten Folgerungen erheblich von denen des Dirac-Modells unterscheiden. Insbesondere ergibt sich hier für die Higgs-Masse im allgemeinsten Zugang ein Intervall von

$$[284, 300) \text{ GeV.} \tag{9}$$

Dieses liegt aber vollständig außerhalb der Grenzen, die Quanten-Korrekturen der Higgs-Masse setzen (s. Gl. (4)).

Zum Abschluß folgt eine **Zusammenfassung** der in der vorangegangenen Arbeit gefundenen Ergebnisse mit einer kurzen Diskussion von nicht behandelten Problemen.

# Kapitel 1

## Mathematische Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden die grundlegenden geometrischen Begriffe für die nachfolgenden Konstruktionen vorgestellt und deren wichtigsten Eigenschaften zusammengefasst. Der geometrische Rahmen für die nachfolgenden Betrachtungen ist dabei durch ein Clifford-Modulbündel bzw. durch den Spezialfall eines getwisteten Spinor-Bündels über einer kompakten, randlosen Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit gerader Dimension gegeben. Um technischen Komplikationen aus dem Weg zu gehen, beschränkt sich die hiesige Darstellung auf den Fall eines getwisteten Spinor-Bündels. Allerdings sind die meisten Untersuchungen auch in dem allgemeineren Rahmen von Clifford-Modulbündeln möglich, wie in [Tol] ausgeführt wird.

Nach einer kurzen Erläuterung des geometrischen Rahmens wird das zentrale Objekt der nachfolgenden Untersuchungen, der Begriff des verallgemeinerten Dirac-Operators, eingeführt. Es werden seine Beziehung zu Clifford-Zusammenhängen diskutiert und einige spezielle Typen von Operatoren vom Dirac-Typ vorgestellt.

Ausführliche Darstellungen des hier beschriebenen Themenkomplexes findet man z.B. in [Ack], [Ack,Tol], [BGV], [Tol], [Ack,Tol], [Nak], [Su,Win].

Zur besseren Lesbarkeit der Formeln gelte in den folgenden Abschnitten die Einsteinsche Summen-Konvention.

### 1.1 Vektorbündel

Bei der folgenden Darstellung werden die grundlegenden Begriffe zu Faserbündeln vorausgesetzt, wie sie z.B. in [BGV] Kapitel 1.1. oder [Su,Win] Kapitel II §1 behandelt werden. Des Weiteren beschränkt sich die hiesige Diskussion auf  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Um die Bezeichnungen festzulegen, sei zunächst:

**Definition 1.1.** *Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{M}$  Mannigfaltigkeiten und  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  eine glatte Surjektion. So heißt  $(\mathcal{F}, \pi)$  ein (Faser)bündel über  $\mathcal{M}$ , wenn gilt:*

*Es existiert eine offene Überdeckung  $\{U_i\}$  von  $\mathcal{M}$ , eine Mannigfaltigkeit  $F$*

und Diffeomorphismen

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F, \quad (1.1)$$

so dass das nachfolgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times F, \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U_i & & \end{array} \quad (1.2)$$

wobei  $\text{pr}_1 : U_i \times F \rightarrow U_i$  die Projektion auf die erste Komponente ist. Des Weiteren werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

$\mathcal{F}$  heißt Total-Raum,  $\pi$  Projektion,  $\mathcal{M}$  Basis,  $\phi_i$  Trivialisierung und  $(U_i, \phi_i)$  (Bündel)karte.  $\pi^{-1}(x) \equiv \mathcal{F}_x$  wird Faser über dem Fußpunkt  $x$  genannt. Darüber hinaus wollen wir eine offene Überdeckung von  $\mathcal{M}$  mit den oben beschriebenen Eigenschaften als trivialisierende Überdeckung bezeichnen.  $\Gamma(\mathcal{F})$  sei die Menge der Schnitte, also die glatten Abbildungen  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $(\pi \circ \psi)(x) = x \quad \forall x \in \mathcal{M}$ . Ferner heiße eine Abbildung  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  fasertreu, wenn gilt:  $(\pi \circ f)(\xi) = \pi(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{F}$ .

Es sollte noch bemerkt werden, dass sich für Faserbündel in vollkommen analoger Weise zu Mannigfaltigkeiten Atlanten, maximale Atlanten und Äquivalenz von Bündeln definieren lassen (s. z.B. [Nak] Kap. 9).

**Definition 1.2.** Sei  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Faser-Bündel und  $\{U_i\}$  eine trivialisierende Überdeckung und  $U_i, U_j \in \{U_i\}$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , dann sei die Übergangsfunktion  $t_{ji}$  definiert durch:

$$\begin{aligned} t_{ji} : U_i \cap U_j &\longrightarrow \text{Diff}(F) \\ x &\longmapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x, \cdot). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Aus der Definition folgt sofort, dass die Übergangsfunktionen  $t_{ji}$  eines Faser-Bündels  $(\mathcal{F}, \pi)$  die so genannte *Kozykel-Bedingung* erfüllen:

Seien  $U_i, U_j, U_k$  offene Mengen einer trivialisierenden Überdeckung  $\{U_i\}$  mit  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , so gilt:

$$\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad t_{kj}(x) \circ t_{ji}(x) = t_{ki}(x). \quad (1.4)$$

**Definition 1.3.** Seien  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\pi' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{M}'$  Faser-Bündel, so heißt ein Paar glatter Abbildungen  $(\phi, f)$  Bündelabbildung, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}' \end{array} \quad (1.5)$$

**Definition 1.4.** Sei  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Faserbündel über  $\mathcal{M}$  und  $\{U_i\}$  eine trivialisierende Überdeckung, dessen typische Faser  $E$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist und dessen Übergangsfunktionen  $\{g_{ji}\}$  linear und invertierbar sind, so nennt man  $(\mathcal{E}, \pi)$  ein Vektorbündel.

Existiert auf den Fasern  $\mathcal{E}_x$  eine hermitesche Struktur  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ , die glatt vom Fußpunkt abhängt, so heißt  $\mathcal{E}$  hermitisch.

**Definition 1.5.** Seien  $(\mathcal{E}, \pi)$  und  $(\mathcal{F}, \pi')$  Vektorbündel mit typischen Fasern  $E$  und  $F$ . Ferner sei  $\{U_i\}$  eine trivialisierende Überdeckung für beide Bündel. (Eine solche Überdeckung lässt sich immer konstruieren.)  $\{g_{ij}\}, \{h_{ij}\}$  seien die zugehörigen Übergangsfunktionen.

Das (Whitney)-Summen-Bündel  $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$  ist definiert durch die typische Faser  $E \oplus F$  und die Übergangsfunktionen  $\{g_{ij} \oplus h_{ij}\}$  zur trivialisierenden Überdeckung  $\{U_i\}$  mit

$$\begin{aligned} g_{ij} \oplus h_{ij}(x) : E \oplus F &\longrightarrow E \oplus F \\ v \oplus w &\mapsto (g_{ij}(x)(v)) \oplus (h_{ij}(x)(w)), \quad x \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Das Tensor-(Produkt)-Bündel  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  ist definiert durch die typische Faser  $E \otimes F$  und die Übergangsfunktionen  $\{g_{ij} \otimes h_{ij}\}$  zur Überdeckung  $\{U_i\}$  mit

$$\begin{aligned} g_{ij} \otimes h_{ij}(x) : E \otimes F &\longrightarrow E \otimes F \\ v \otimes w &\mapsto (g_{ij}(x)(v)) \otimes (h_{ij}(x)(w)), \quad x \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Das Endomorphismen-Bündel  $\text{End}(\mathcal{E})$  ist definiert durch die typische Faser  $\text{End}(E)$  und die Übergangsfunktionen  $\{G_{ij}\}$  zur Überdeckung  $\{U_i\}$  mit

$$\begin{aligned} G_{ij}(x) : \text{End}(E) &\longrightarrow \text{End}(E) \\ \varphi &\mapsto g_{ij}(x) \circ \varphi \circ g_{ij}^{-1}(x), \quad x \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Das so genannte Rekonstruktionstheorem [Su,Win] Kapitel II. §1 stellt sicher, dass die in Definition 1.5 definierten Bündel existieren.

**Definition 1.6.** Sei  $(\mathcal{E}, \pi)$  ein Vektorbündel der Form  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ , so heißt  $\mathcal{E}$   $\mathbb{Z}_2$ -graduiert.

Hier ist anzumerken, dass die obige Definition äquivalent zur Existenz eines *Graduierungs-Operators* ist, einer Bündelabbildung  $(\chi_{\mathcal{E}}, \text{id}_{\mathcal{M}})$  mit  $\chi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ;  $\chi_{\mathcal{E}}$  ist eine glatte fasertreue Abbildung, die eingeschränkt auf die Fasern eine Involution ist.

Weiter sollte erwähnt werden, dass die Schnitte  $\Gamma(\mathcal{E})$  in ein  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel  $\mathcal{E}$  in natürlicher Weise ein  $C^\infty(\mathcal{M})$ -Modul bilden. Die Aktion von  $C^\infty(\mathcal{M})$  auf  $\Gamma(\mathcal{E})$  ist definiert durch:

$$(f\psi)(x) := f(x) \cdot \psi(x), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad \forall x \in \mathcal{M}. \quad (1.9)$$

Hier ist  $C^\infty(\mathcal{M})$  die Menge der glatten  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf  $\mathcal{M}$  und  $\cdot$  auf der rechten Seite der Gleichung (1.9) die skalare Multiplikation in der Faser.

Kommen wir nun zu Differential-Operatoren auf Vektorbündeln:

**Definition 1.7.** Sei  $(\mathcal{E}, \pi)$  nun ein Vektorbündel mit Faser  $V$  über  $\mathcal{M}$ . Ein Differential-Operator der Ordnung  $k$  ist eine glatte Abbildung  $P : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ , die in lokalen Koordinaten gegeben ist durch:

$$P = \sum_{i=0}^k \sum_{I, |I|=i} a^I(x) \partial_I, \quad a^I(x) \in \text{End}(E). \quad (1.10)$$

$I$  bezeichne einen Multiindex, und weiter existiere ein  $I$  mit  $|I| = k$  und  $a^I(x) \neq 0$ . Das Hauptsymbol  $\sigma$  von  $P$  ist definiert durch die Gleichung (s. z.B. [Ack]):

$$\sigma(P)(x, df(x))\psi(x) := \frac{i^k}{k!} (P f^k \psi)(x) \quad (1.11)$$

mit  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E})$  und  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ,  $f(x) = 0$ .

Für konkrete Berechnungen des Hauptsymboles ist die lokale Form nützlich:

$$\sigma(P)(x, \xi)w = a^I(x)\xi_I w, \quad \xi_I := \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}, \quad w \in \mathcal{E}_x. \quad (1.12)$$

Damit lässt sich dann folgende wichtige Klasse von Differential-Operatoren definieren:

**Definition 1.8.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$ . Ein Differential-Operator  $\Delta : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$  zweiter Ordnung heißt ein verallgemeinerter Laplace-Operator, wenn für sein Hauptsymbol gilt:

$$\sigma(\Delta)(x, \xi) = \pm g_x(\xi, \xi) \mathbf{1}_{\mathcal{E}_x}. \quad (1.13)$$

$g_x$  sei hier die Metrik auf dem Kotangenten-Bündel am Punkt  $x$ .

Eine weitere wichtige Klasse von Operatoren auf Vektorbündeln sind die Zusammenhänge.

**Definition 1.9.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel über  $\mathcal{M}$ , dann bezeichnet man als Zusammenhang eine glatte Abbildung

$$\nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}), \quad (1.14)$$

die einer Leibniz Regel der folgenden Form genügt:

$$\nabla^{\mathcal{E}} f\psi = df \otimes \psi + f\nabla^{\mathcal{E}}\psi, \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{E}). \quad (1.15)$$

Dabei bezeichne  $d$  das äußere Differential. Darüber hinaus sei:

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) := \{ \nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}) \mid \nabla^{\mathcal{E}} \text{ Zusammenhang} \}. \quad (1.16)$$

Hierzu sei angemerkt, dass die Definition von Zusammenhängen und der zugehörigen Nomenklatur in der Literatur nicht einheitlich ist. So wird in [BGV] und [Tol2] der Zusammenhang über das Spalten einer kurzen exakten Sequenz definiert.  $\nabla^{\mathcal{E}}$  ist dort die durch einen linearen Zusammenhang induzierte kovariante Ableitung (s. [BGV]) bzw. der Nabla-Operator (s. [Tol2]), wogegen  $\nabla^{\mathcal{E}}$  z.B. in [Ack] als Zusammenhang verwendet wird. Es ist hierzu zu sagen, dass alle diese Definitionen von Zusammenhängen äquivalent sind und sich aus  $\nabla^{\mathcal{E}}$  das Spalten der exakten Sequenz rekonstruieren lässt.

**Definition 1.10.** Sei  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes Vektorbündel, so heiße ein Zusammenhang gerade, wenn gilt:

$$\nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}^\pm) \longrightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^\pm). \quad (1.17)$$

Ferner sei:

$$\mathcal{A}^+(\mathcal{E}) := \{ \nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}(\mathcal{E}) \mid \nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}^\pm) \rightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^\pm) \}. \quad (1.18)$$

Weiter sei:

$$\Omega^k(\mathcal{M}, \mathcal{E}) := \Gamma(\Lambda^k T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}). \quad (1.19)$$

$$\Omega^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \quad (1.20)$$

die Menge der  $\mathcal{E}$ -wertigen Differentialformen auf  $\mathcal{E}$ , wobei  $\Omega^0(\mathcal{M}, \mathcal{E}) := C^\infty(\mathcal{M})$  gesetzt wird. Ferner bezeichne  $\Omega^*(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E})) := \Gamma(\Lambda T^*\mathcal{M} \otimes \text{End}(\mathcal{E}))$  die  $\text{End}(\mathcal{E})$ -wertigen Differentialformen. Auf  $\Omega^*(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E}))$  lässt sich das  $\wedge$ -Produkt von  $\Omega^*(\mathcal{M})$  fortsetzen durch:

**Definition 1.11.** Sei  $(\mathcal{E}, \pi)$  ein Vektorbündel, dann sei  $\wedge$  die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega^*(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E})) \times \Omega^*(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E})) &\longrightarrow \Omega^*(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E})) \\ (\alpha \otimes A, \alpha' \otimes A') &\mapsto \alpha \wedge \alpha' \otimes AA'. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Auf der rechten Seite sei das  $\wedge$ -Produkt auf  $\Omega^*(\mathcal{M})$  gemeint.

Mit der Hilfe von Zusammenhängen lässt sich nun die folgende Klasse von verallgemeinerten Laplace-Operatoren definieren:

**Definition 1.12.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$ . Dann ist der Zusammenhangs- oder Bochner-Laplace-Operator definiert durch:

$$\Delta^{\nabla^{\mathcal{E}}} := \pm \text{ev}_g(\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} \nabla^{\mathcal{E}}). \quad (1.22)$$

$\text{ev}_g$  bezeichnet hier die Evaluationsabbildung bezüglich der Metrik  $g$ , die gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \text{ev}_g : T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \alpha \otimes \beta \otimes v &\mapsto \alpha(\beta^\sharp)v. \end{aligned} \quad (1.23)$$

$\sharp$  ist der durch die Metrik induzierte kanonische Isomorphismus zwischen  $T^*\mathcal{M}$  und  $T\mathcal{M}$ .

Wie schon bei der Definition des verallgemeinerten Laplace-Operators sind hier zwei Wahlen für das Vorzeichen möglich, wobei in der mathematischen Literatur üblicherweise das negative Vorzeichen gewählt wird. In der physikalischen Literatur wird das positive Vorzeichen bevorzugt. Um später konsistenter Formeln zu erhalten, werden beide Vorzeichen zugelassen. Für spätere Rechnungen ist die lokale Form eines Zusammenhangs-Laplace-Operators nützlich (s. auch [BGV] Kap. 2.1).

**Lemma 1.1.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$  und  $\Delta^{\nabla^{\mathcal{E}}}$  ein Zusammenhangs-Laplace-Operator zum Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}}$ . So gilt:

$$\Delta^{\nabla^{\mathcal{E}}} = \pm g^{ij}(\nabla_i^{\mathcal{E}} \nabla_j^{\mathcal{E}} - \Gamma_{ij}^k \nabla_k^{\mathcal{E}}). \quad (1.24)$$

$\Gamma_{ij}^k$  bezeichnen hier die Christoffel-Symbole des Levi-Civita Zusammenhanges auf  $\mathcal{M}$  und  $\nabla_i^{\mathcal{E}} := \nabla_{\partial_i}^{\mathcal{E}}$ .

**Beweis:** (S. z.B. [BGV] Kap. 2.1) Sei  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E})$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} \nabla^{\mathcal{E}} \psi &= \nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} dx^i \otimes \nabla_i^{\mathcal{E}} \psi \\ &= dx^i (\nabla_i^{LC} dx^j) \otimes (\nabla_j^{\mathcal{E}} \psi) + dx^i \otimes dx^j \otimes (\nabla_i^{\mathcal{E}} \nabla_j^{\mathcal{E}} \psi) \\ &= (dx^j \otimes dx^i \otimes \nabla_j^{\mathcal{E}} \nabla_i^{\mathcal{E}} - \Gamma_{jk}^i dx^j \otimes dx^k \otimes \nabla_i^{\mathcal{E}}) \psi. \end{aligned}$$

$\nabla^{LC}$  bezeichnet den auf  $\Omega^*(\mathcal{M})$  fortgesetzten Levi-Civita-Zusammenhang von  $\mathcal{M}$  bezüglich  $g$ . Weiter ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \pm \text{ev}_g(\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}} \nabla^{\mathcal{E}}) \psi &= \pm (g^{jk} dx^i (\partial_k) \nabla_j^{\mathcal{E}} \nabla_i^{\mathcal{E}} - \Gamma_{jk}^i g^{j\ell} dx^k (\partial_\ell) \nabla_i^{\mathcal{E}}) \psi \\ &= \pm g^{ij} (\nabla_i^{\mathcal{E}} \nabla_j^{\mathcal{E}} - \Gamma_{ij}^k \nabla_k^{\mathcal{E}}) \psi. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung.  $\square$

Der Vollständigkeit halber sei noch die Definition der Krümmungsform eines Zusammenhanges  $\nabla^{\mathcal{E}}$  auf  $\mathcal{E}$  gegeben:

**Definition 1.13.** Sei  $(\mathcal{E}, \pi)$  ein Vektorbündel und  $\nabla^\mathcal{E} \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$  ein Zusammenhang. Die Krümmungs-2-Form zu  $\nabla^\mathcal{E}$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} F^{\nabla^\mathcal{E}} : \Gamma(\mathcal{E}) &\longrightarrow \Omega^2(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \\ \psi &\longmapsto d^{\nabla^\mathcal{E}}(\nabla^\mathcal{E}\psi), \end{aligned} \quad (1.25)$$

wobei  $d^{\nabla^\mathcal{E}} : \Omega^1(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{M}, \mathcal{E})$  die lineare Fortsetzung von der Abbildung

$$\alpha \otimes \psi \longmapsto (\nabla^{LC}\alpha) \otimes \psi - \alpha \wedge (\nabla^\mathcal{E}\psi), \quad \alpha \in \Omega^1(\mathcal{M}), \psi \in \Gamma(\mathcal{E}) \quad (1.26)$$

ist. Dabei ist  $\nabla^{LC}$  der auf  $\Omega^*(\mathcal{M})$  fortgesetzte Levi-Civita-Zusammenhang.

## 1.2 Prinzipal- & Assoziierte Bündel

Kommen wir zu den grundlegenden Tatsachen dieses Themenkomplexes.

**Definition 1.14.** Sei  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Faserbündel, dessen typische Faser durch eine Lie-Gruppe  $G$  gegeben ist. Des Weiteren existiert eine Rechts-Aktion  $\mathcal{R}$  von  $G$  auf  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{P} \times G &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (p, g) &\longmapsto \mathcal{R}(p, g) =: \mathcal{R}_g(p) =: pg \end{aligned} \quad (1.27)$$

mit der Eigenschaft:

$$\pi(pg) = \pi(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}, \forall g \in G, \quad (1.28)$$

die faserweise frei und transitiv ist. Dann nennt man  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $(G)$ -Prinzipalbündel.

Hierzu sei angemerkt, dass die Fasern von  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  mitnichten Lie-Gruppen sind, sondern nur diffeomorph zu der Mannigfaltigkeit der Lie-Gruppe  $G$ .  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ist kein Gruppen-Bündel.

Sei nun:

**Definition 1.15.** Sei  $F$  eine Mannigfaltigkeit,  $G$  eine Lie-Gruppe und  $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(F)$  eine glatte Abbildung, so dass  $\rho$  eine Links-Aktion von  $G$  auf  $F$  ist. Das Paar  $(\rho, F)$  heißt dann ein Links- $G$ -Raum.

Damit lässt sich nun definieren:

**Definition 1.16.** Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel und  $(\rho, F)$  ein Links- $G$ -Raum. Dann sei  $E := \mathcal{P} \times_\rho F$  die Quotientenmenge von  $\mathcal{P} \times F$  bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(p, f) \sim (p', f') \quad :\Leftrightarrow \quad \exists g \in G : \quad (pg, \rho(g^{-1})f) = (p', f'). \quad (1.29)$$

Seien nun  $\{U_i\}$  eine trivialisierende Überdeckung von  $\mathcal{M}$  bezüglich  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  und  $\{\phi_i\}$  die zugehörigen Trivialisierungen. Dann ist das zu  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  assoziierte Faserbündel  $\pi_E : E \rightarrow \mathcal{M}$  definiert durch die Projektion

$$\begin{aligned} \pi_E : E &\longrightarrow \mathcal{M} \\ [(p, f)] &\longmapsto \pi(p). \end{aligned} \quad (1.30)$$

$[(p, f)]$  sei die Äquivalenzklasse bzgl.  $\sim$  und  $\pi$  sei die Projektion von  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ . Sei nun  $(U_i, \phi_i)$  eine Trivialisierung von  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ , dann ist eine Trivialisierung von  $E$  bzgl.  $U_i$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \psi_i : \pi_E^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times F \\ [(p, f)] &\mapsto (\pi(x), \rho(\text{pr}_2 \circ \phi_i(p))f), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$\text{pr}_2$  sei die Projektion auf die zweite Komponente.

Man kann sich überzeugen, dass  $(E, \pi_E)$  mit der obigen Definition tatsächlich ein Bündel bildet (s. [BGV] Kap. 1.1., [Tol2] Kap. 3.2). Nach Konstruktion ist  $F$  die typische Faser von  $\mathcal{P} \times_\rho F$ .

Für assoziierte Bündel gilt folgende wichtige Eigenschaft:

**Lemma 1.2.** *Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel,  $(E, \pi_E)$  ein hierzu assoziiertes Faserbündel mit typischer Faser  $F$ , so existiert eine kanonische Bijektion:*

$$\begin{aligned} \Phi : C_{\text{äq}}^\infty(\mathcal{P}, F) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}) \\ f &\mapsto \Phi(f), \\ \Phi(f)(x) &:= [(p, f(p))] \Big|_{p \in \pi^{-1}(x)} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$C_{\text{äq}}^\infty(\mathcal{P}, F)$  bezeichnet hier die Menge der  $\rho$ -äquvarianten Abbildungen:  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow F$ , für die gilt:  $\varphi(pg) = \rho(g^{-1})\varphi(p) \forall p \in \mathcal{P} \forall g \in G$ . Für den Beweis sei z.B. auf Satz 3.2.1 in [Tol2] verwiesen.

**Definition 1.17.** *Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel und  $(\rho, V)$  ein Links- $G$ -Raum, wobei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\rho$  eine lineare Darstellung von  $G$  ist.  $\xi_V := \mathcal{P} \times_\rho V$  heißt dann das zu  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  assoziierte Vektorbündel.*

Für den Fall, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit gegeben ist, existieren die folgenden Prinzipalbündel (s. [BGV] Kap. 1.2):

**Definition 1.18.** *Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\dim \mathcal{M} = n$ , so ist das orthogonale Frame-Bündel bzgl.  $g$  definiert durch:*

$$O(\mathcal{M}) := \{(x, (e_1, \dots, e_n)) \mid e_i \text{ bildet eine ONB bzgl. } g \text{ in } T_x \mathcal{M}\}; \quad (1.33)$$

ist  $\mathcal{M}$  darüber hinaus noch orientiert, so lässt sich das spezielle orthogonale Frame-Bündel definieren:

$$SO(\mathcal{M}) := \{(x, (e_1, \dots, e_n)) \mid e_i \text{ bildet eine orientierte ONB bzgl. } g \text{ in } T_x \mathcal{M}\}. \quad (1.34)$$

Hier bezeichnet  $T_x \mathcal{M}$  den Tangentialraum von  $\mathcal{M}$  am Fußpunkt  $x$ .

Wie in [BGV] Kap. 1.2 ausgeführt wird, sind  $O(\mathcal{M})$  bzw.  $SO(\mathcal{M})$   $O(n)$ - bzw.  $SO(n)$ -Prinzipalbündel über  $(\mathcal{M}, g)$  und es gelten die folgenden Bündel-isomorphismen:

$$T\mathcal{M} \cong O(\mathcal{M}) \times_{O(n)} \mathbb{R}^n \cong SO(\mathcal{M}) \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n, \quad (1.35)$$

wobei hier jeweils die fundamentalen Darstellungen von  $O(n)$  bzw.  $SO(n)$  zu nehmen sind.



## 1.3 Clifford-Modulbündel

### 1.3.1 Clifford-Algebren & Clifford-Module

Hier sollen die wichtigsten Eigenschaften und Begriffe zu Clifford-Algebren behandelt werden. Wir werden uns dabei auf Clifford-Algebren beschränken, die von einem euklidischen Vektorraum  $(V, g)$  gerader Dimension erzeugt werden, da allein dieser Fall für die späteren Betrachtungen relevant ist. Allerdings lassen sich die hier beschriebenen Konstruktionen auch für  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit beliebiger, nicht ausgearteter, symmetrischer Bilinearform und beliebiger endlicher Dimension durchführen, gegebenenfalls mit entsprechenden Modifikationen. Ein weiterer Überblick über die Eigenschaften von Clifford-Algebren findet sich u.a. in [BGV], [Fr], [Tol2].

**Definition 1.19.** Sei  $(V, g)$  ein euklidischer Vektorraum gerader Dimension, dann heißt das Paar  $(\mathcal{C}_\pm(V, g), j)$  Clifford-Algebra von  $(V, g)$ , wenn gilt:

1.  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  ist eine assoziative  $\mathbb{R}$ -Algebra mit  $\mathbf{1}$ .
2. Es existiert eine lineare Abbildung  $j : V \rightarrow \mathcal{C}_\pm(V, g)$  für die gilt:

$$j(v)^2 = \pm g(v, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.36)$$

Dabei soll das Vorzeichen in der obigen Gleichung wie der Index von  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  gewählt sein.  $j$  heißt Clifford-Abbildung.

3. Sei  $A$  eine weitere assoziative  $\mathbb{R}$ -Algebra mit  $\mathbf{1}$  und  $u_\pm : V \rightarrow A$  eine weitere Clifford-Abbildung, so existiert genau ein Algebren-Homomorphismus  $\tilde{u}_\pm : \mathcal{C}_\pm(V, g) \rightarrow A$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_\pm(V, g) & \\ j \nearrow & & \searrow \tilde{u}_\pm \\ V & \xrightarrow{u_\pm} & A \end{array} \quad (1.37)$$

Dies wird auch als die universelle Eigenschaft der Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  bezeichnet.

Hierzu ist anzumerken, dass die Definition für Clifford-Algebren über  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen mit beliebiger symmetrischer, nicht ausgearteter Bilinearform völlig analog zur obigen Definition ist, nur dass  $\mathbb{R}$ -Algebren durch  $\mathbb{K}$ -Algebren ersetzt werden müssen. Des Weiteren wird auch die Referenz auf das Skalarprodukt von  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  unterdrückt, wenn keine Gefahr für Mehrdeutigkeiten besteht. Zu der Möglichkeit der Wahl des Vorzeichens in Gleichung (1.36) ist zu sagen, dass dies auf dem Niveau von Clifford-Algebren über einem Vektorraum eine Frage der Konvention ist. Hier verhält es sich genau so wie mit den Vorzeichen des verallgemeinerten Laplace-Operators (s. Gl. (1.8)): In der mathematischen Literatur wird vorwiegend das negative Vorzeichen gewählt (s. z.B. [BGV]), während in der physikalischen Literatur das positive Vorzeichen bevorzugt wird (s. z.B. [Na]). Wenn man allerdings zu Clifford-(Algebren)-Bündeln über Riemannschen Mannigfaltigkeiten übergeht, bei denen eine Metrik  $g$  fest gegeben ist, so liefern die beiden Vorzeichen verschiedene Clifford-Bündel über der Basis-Mannigfaltigkeit. Dies hat zur Folge, dass auch Formeln für Zusammenhänge,

Krümmungen etc. auf diesen Bündeln bzw. auf Bündeln, die aus ihnen konstruiert werden, teilweise verschieden sind. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, diese beiden Fälle simultan zu untersuchen. Es sollte weiter erwähnt werden, dass die Clifford-Abbildung  $j$  injektiv ist, da  $g$  positiv definit ist. Hierdurch ist eine natürliche Einbettung von  $V$  in  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  gegeben.

Es sei weiter angemerkt, dass aus Gleichung (1.36) die bekannte Relation für Clifford-Algebren folgt:

$$j(v)j(w) + j(w)j(v) = \pm 2g(v, w)\mathbf{1}, \quad \forall v, w \in V, \quad j: V \rightarrow \mathcal{C}_\pm(V, g). \quad (1.38)$$

Um die Existenz von Clifford-Algebren sicherzustellen, wird das folgende Theorem zitiert (s. [Fr]):

**Theorem 1.1.** 1. Sei  $(V, g)$  ein euklidischer Raum gerader Dimension, so existiert eine Clifford-Algebra  $(\mathcal{C}_\pm(V, g), j)$  zu  $(V, g)$ .

2. Sind  $(\mathcal{C}_\pm(V, g), j)$ ,  $(\mathcal{C}'_\pm(V, g), j')$  zwei Clifford-Algebren, so existiert ein Algebren-Isomorphismus  $f: \mathcal{C}_\pm(V, g) \rightarrow \mathcal{C}'_\pm(V, g)$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_\pm(V, g) & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}'_\pm(V, g) \\ & \swarrow j & \nearrow j' \\ & V & \end{array} \quad (1.39)$$

**Beweis:** Eine detaillierte Darstellung befindet sich in [Fr] Kapitel 1.2. Aber die Ideen sollen kurz skizziert werden:

Um die Existenz zu beweisen, betrachtet man z.B. die von  $V$  erzeugte freie Tensor-Algebra  $\mathcal{T}(V)$  und bildet die Quotienten-Algebra nach dem zweiseitigen Ideal  $\mathcal{I}$ , das erzeugt wird von der Menge

$$\{v \otimes v \mp \mathbf{1} \mid v \in V\}.$$

Die Clifford-Abbildung  $j$  erhält man durch die Verkettung der kanonischen Einbettung  $\iota: V \rightarrow \mathcal{T}(V)$  mit der Projektion  $\pi$  auf die Äquivalenzklassen.

Die zweite Eigenschaft ergibt sich aus der universellen Eigenschaft von  $\mathcal{C}_\pm(V)$ .  $\square$

Wenn man sich an die Tatsache erinnert, dass eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $V$  eine Basis der Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  induziert, wobei die Basiselemente die Form

$$j(b_{i_1}) \cdots j(b_{i_k}), \quad i_j < i_\ell, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}, \quad k = 0, \dots, n \quad j(b_{j_0}) := 1 \quad (1.40)$$

besitzen, ergibt sich:

**Definition 1.20.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra und  $\Lambda V$  die von  $V$  erzeugte Grassmann-Algebra. Ferner sei  $e_1, \dots, e_n$  eine  $g$ -Orthonormalbasis von  $V$ . Dann ist die Quantisierungsabbildung  $\mathbf{c}$  durch die lineare Fortsetzung der folgenden Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}: \Lambda V &\longrightarrow \mathcal{C}_\pm(V, g) \\ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} &\longmapsto j(e_{i_1}) \cdots j(e_{i_k}), \quad 0 < k \leq \dim V, \quad i_j \neq i_\ell \quad \text{für } j \neq \ell, \end{aligned} \quad (1.41)$$

wobei  $e_0 := 1$  und  $j(e_0) := 1$ .

Zur Quantisierungsabbildung ist zu sagen, dass sie trotz ihrer Definition über eine Orthonormalbasis tatsächlich unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis ist, wie das folgende Lemma zeigt:

**Lemma 1.3.** *Die Quantisierungsabbildung in 1.20 ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.*

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass die Definition nicht von der Basis abhängt, was nichts anderes heißt, dass für Orthonormalbasen  $e_1, \dots, e_n$  und  $e'_1, \dots, e'_n$  von  $V$  gelten muß:

$$\mathbf{c}(e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k}) = j'_{i_1} \dots j'_{i_k} = \gamma_{j_1}^{i_1} j^{j_1} \dots \gamma_{j_n}^{i_n} j^{j_n},$$

wobei  $j_{i_j} := j(e_{i_j})$  ist und  $\gamma_i^j$  sind die Koeffizienten von orthogonalen Transformationsmatrizen, so dass gilt:  $e'_i = \gamma_i^j e_j$ . Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k}) &= \gamma_{i_1}^{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} \mathbf{c}(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) \\ &= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ j_j \neq j_\ell \text{ für } j \neq \ell}} \gamma_{i_1}^{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_1} \dots j_{j_k} \\ &= \gamma_{i_1}^{j_1} j_{i_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_k} - \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ \exists j, \ell: j \neq \ell, j_j = j_\ell}} \gamma_{i_1}^{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_1} \dots j_{j_k}. \end{aligned}$$

Untersucht man nun den zweiten Term weiter, so ergibt sich:

$$\sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ \exists j, \ell: j \neq \ell, j_j = j_\ell}} \gamma_{i_1}^{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_1} \dots j_{j_k} = \sum_{j < \ell} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ j_j = j_\ell}} (-1)^{j+\ell} \gamma_{i_j}^{j_j} \gamma_{i_\ell}^{j_\ell} j_{j_j} j_{j_\ell} R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k},$$

wobei gilt:

$$R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k} := \gamma_{i_1}^{j_1} j_{j_1} \dots \widehat{\gamma_{i_j}^{j_j} j_{j_j}} \dots \widehat{\gamma_{i_\ell}^{j_\ell} j_{j_\ell}} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_k}.$$

$\widehat{\phantom{x}}$  bedeutet hier das Auslassen der entsprechenden Terme. Da  $j_j = j_\ell$  gilt, ergibt sich:  $j_{j_j} j_{j_\ell} = \frac{1}{2}(j_{j_j} j_{j_\ell} + j_{j_\ell} j_{j_j}) = \delta_{j_j j_\ell}$ . Man erhält so:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ \exists j, \ell: j \neq \ell, j_j = j_\ell}} \gamma_{i_1}^{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_1} \dots j_{j_k} &= \sum_{j < \ell} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ j_j = j_\ell}} (-1)^{j+\ell} \gamma_{i_j}^{j_j} \gamma_{i_\ell}^{j_\ell} \delta_{j_j j_\ell} R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k} \\ &= \sum_{j < \ell} \sum_{j_1, \dots, j_k} (-1)^{j+\ell} \gamma_{i_j}^{j_j} \gamma_{i_\ell}^{j_\ell} \delta_{j_j j_\ell} R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k}. \end{aligned}$$

Da  $\delta_{ij}$  die Komponenten der Metrik in einer Orthonormalbasis darstellt, gilt für orthogonale Transformationen  $\gamma_{i_1}^{j_1} \gamma_{i_2}^{j_2} \delta_{j_1 j_2} = \delta_{i_1 i_2}$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{j < \ell} \sum_{j_1, \dots, j_k} (-1)^{j+\ell} \gamma_{i_j}^{j_j} \gamma_{i_\ell}^{j_\ell} \delta_{j_j j_\ell} R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k} &= \sum_{j < \ell} (-1)^{j+\ell} \delta_{i_j i_\ell} R_{i_1 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_\ell \dots i_k} \\ &= 0, \text{ da } i_j \neq i_\ell. \end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\mathbf{c}(e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_k}) = \gamma_{i_1}^{j_1} j_{j_1} \dots \gamma_{i_k}^{j_k} j_{j_k} = j'_{i_1} \dots j'_{i_k}. \quad \square$$

Zur Quantisierungsabbildung  $\mathbf{c} : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  soll noch angemerkt werden, dass sie einen Vektorraum-Isomorphismus zwischen  $\Lambda V$  und  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  darstellt (s. [BGV] Kap. 3.1).  $\mathbf{c}$  ist jedoch kein Algebren-Isomorphismus. Die Umkehrabbildung zur Quantisierungsabbildung  $\sigma := \mathbf{c}^{-1}$  wird als *Symbolabbildung* bezeichnet. Zur Quantisierungsabbildung lässt sich weiterhin sagen, dass sie kanonisch gegeben ist, da sie nach dem obigen Lemma 1.3 unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis ist und Orthonormalbasen in Räumen mit Bilinearformen ausgezeichnet sind.

Die Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  besitzt eine natürliche Involution  $\beta$ , wie der [Fr] entnommene Satz zeigt:

**Theorem 1.2.** *Die Clifford-Algebra  $(\mathcal{C}_{\pm}(V, g), j)$  besitzt eine Involution  $\beta : \mathcal{C}_{\pm}(V, g) \rightarrow \mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  mit der Eigenschaft :*

*$\beta$  ist ein Algebren-Homomorphismus und eine Involution mit der Eigenschaft:  $\beta^2 = \text{id}_{\mathcal{C}_{\pm}(V, g)}$ .*

**Beweis:** Man betrachte die Abbildung  $u : V \rightarrow \mathcal{C}_{\pm}(V, g)$ ,  $v \mapsto -j(v)$ .  $j$  sei hier die Clifford-Abbildung. Dann gilt:

$$u^2(v) = (-j(v))^2 = j(v)^2 = \pm g(v, v)\mathbf{1}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft existiert nun ein Algebren-Homomorphismus  $\beta : \mathcal{C}_{\pm}(V, g) \rightarrow \mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  mit

$$\beta \circ j(v) = -j(v), \quad \forall v \in V.$$

Wegen  $\beta \circ \beta j(v) = \beta(-j(v)) = -\beta(j(v)) = j(v)$  ist  $\beta^2$  die Identität auf  $j(V)$  und damit aufgrund der universellen Eigenschaft die Identität auf  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$ .  $\square$

Die Involution  $\beta$  aus dem vorangegangenen Satz induziert eine *natürliche  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung* von  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$ . Sei nun:

**Definition 1.21.**

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\pm}^0(V, g) &:= \{a \in \mathcal{C}_{\pm}(V, g) \mid a \text{ gerade} \} \\ \mathcal{C}_{\pm}^1(V, g) &:= \{a \in \mathcal{C}_{\pm}(V, g) \mid a \text{ ungerade} \}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

*Dies ist alles bezüglich der natürlichen  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung auf  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  zu sehen.*

Für die Multiplikation in der Clifford-Algebra gilt dann:

$$\mathcal{C}_{\pm}^i(V, g) \cdot \mathcal{C}_{\pm}^j(V, g) \subset \mathcal{C}_{\pm}^{(i+j \bmod 2)}(V, g). \quad (1.43)$$

Damit folgt sofort, dass  $\mathcal{C}_{\pm}^0(V, g)$  eine Unter-Algebra von  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  bildet.

Die  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung erlaubt es,  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  die Struktur einer *Lie-Superalgebra* zu geben, indem man einen *Superkommutator* auf  $\mathcal{C}_{\pm}(V, g)$  definiert durch:

$$\begin{aligned} |[a, b]| &:= ab - (-1)^{|a||b|}ba, \quad a, b \in \mathcal{C}_{\pm}(V, g), \\ |a| &:= \begin{cases} 1; & a \in \mathcal{C}_{\pm}^1(V, g) \\ 0; & a \in \mathcal{C}_{\pm}^0(V, g) \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 1.22.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra, dann ist das Super-Zentrum definiert durch:

$$\mathcal{Z}_s(\mathcal{C}_\pm(V, g)) := \{a \in \mathcal{C}_\pm(V, g) \mid [a, b] = 0, \quad \forall b \in \mathcal{C}_\pm(V, g)\}. \quad (1.45)$$

Für den Fall, dass die Dimension von  $V$  gerade ist, gilt folgender Satz:

**Theorem 1.3.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra und  $\dim V$  sei gerade, dann ist das Super-Zentrum von  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  trivial.

**Beweis:** Hier sei auf die Literatur verwiesen: [Gr] Kapitel 10 .

Es lässt sich nun für die Komplexifizierung  $\mathcal{C}_\pm(V, g) \otimes \mathbb{C}$  von  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  ein kanonisches Element definieren (s. [BGV]):

**Definition 1.23.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g) \otimes \mathbb{C}$  die Komplexifizierung der Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$ ,  $\dim V$  sei gerade und  $e_1, \dots, e_n$  sei eine Orthonormalbasis von  $V$ . Das kanonische Element  $\Gamma$  ist dann gegeben durch:

$$\Gamma := i^{\frac{n}{2}} j(e_1) \cdots j(e_n). \quad (1.46)$$

Es besitzt die Eigenschaften:

**Lemma 1.4.** Sei  $\Gamma$  das kanonische Element der komplexifizierten Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(V, g) \otimes \mathbb{C}$ , so gilt:

1.  $\Gamma j(v) = -j(v)\Gamma, \quad v \in V.$
2.  $\Gamma^2 = \mathbf{1}.$

Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen bzw. siehe [BGV] Kapitel 3.2 . Zum kanonischen Element lässt sich weiter sagen, dass es trotz seiner basisabhängigen Definition kanonisch ist, da es proportional zum Bild der Volumenform aus  $\Lambda V$  unter der Quantisierungsabbildung  $\mathbf{c}$  ist. Der Vorfaktor wird durch die Bedingung  $\Gamma^2 = \mathbf{1}$  festgelegt. Das kanonische Element lässt sich auch für reelle Clifford-Algebren mit den gleichen Eigenschaften definieren, wenn die Dimension des unterliegenden Vektorraumes  $V$  durch vier teilbar ist (s. [BGV] Kap. 3.2). Die Definition 1.23 kann auch auf Clifford-Algebren über Vektorräumen mit ungerader Dimension übertragen werden, nur dass dann dort gilt:  $\Gamma^2 = -1$ . Des Weiteren definiert  $\Gamma$  den Graduierungsoperator zur natürlichen  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung auf  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  für den Fall, dass  $\dim V$  durch vier teilbar ist, bzw. auf  $\mathcal{C}_\pm(V, g) \otimes \mathbb{C}$ .

Kommen wir nun zu Clifford-Modulen:

**Definition 1.24.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra, so ist ein Clifford-Modul  $(W, c_\pm)$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $W = W^+ \oplus W^-$  und einer Clifford-Aktion:

$$c_\pm : \mathcal{C}_\pm(V, g) \longrightarrow \text{End}(W). \quad (1.47)$$

$c_\pm$  ist eine Algebra-Darstellung mit der Eigenschaft:

$$c_\pm(\mathcal{C}_\pm^0(V, g))W^\pm \subset W^\pm, \quad c_\pm(\mathcal{C}_\pm^1(V, g))W^\pm \subset W^\mp. \quad (1.48)$$

Wenn man komplexifizierte Clifford-Algebren betrachtet, so existiert ein ausgezeichnete Clifford-Modul, wie der hier zitierte Satz zeigt:

**Theorem 1.4.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra und  $V$  ein orientierter, euklidischer Vektorraum gerader Dimension, dann gilt:

Es existiert ein eindeutig bestimmter Clifford-Modul  $S = S^+ \oplus S^-$ , der Spinor-Modul, so dass gilt:

$$\mathcal{C}_\pm(V, g) \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(S). \quad (1.49)$$

Es gilt ferner  $\dim S = 2^{\frac{\dim V}{2}}$ ,  $\dim S^\pm = 2^{\frac{\dim V}{2}-1}$  und es existiert ein bis auf eine Konstante eindeutiges hermitesches Produkt, so dass  $S$  ein selbstadjungierter Clifford-Modul über  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  ist, und es gilt  $S^+ \perp S^-$ .

Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [BGV] Kapitel 3 in den Sätzen 3.19 und 3.26. Die Elemente von  $S$  werden allgemein als *Spinoren* bezeichnet.

Dieser Satz liefert zusammen mit den Wedderburn-Theoremen (s. [Gr] Kap. 11) die folgende Charakterisierung komplexer Clifford-Module:

**Theorem 1.5.** Seien  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra und  $(W, c_\pm)$  ein komplexer Clifford-Modul, und  $c_\pm$  sei treu. Es existiert dann ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\widetilde{W}$ , so dass gilt:

$$W \cong S \otimes \widetilde{W}, \quad (1.50)$$

wobei  $S$  der Spinor-Modul zu  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  ist und  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  auf  $\widetilde{W}$  trivial operiert.

Ein Beweis zu dieser Aussage befindet sich in [BGV] Kapitel 3.2.

Eine weitere Besonderheit ist, dass auf dem Spinor-Modul die Spin-Gruppe operiert, die in der Clifford-Algebra enthalten ist. Man definiert:

**Definition 1.25.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra, dann ist die Gruppe  $\text{Spin}(V)$  definiert durch:

$$\text{Spin}(V) := \{a \in \mathcal{C}_\pm^0(V, g) \mid \exists b \in \mathcal{C}_\pm(V, g) \quad ab = ba = 1\}. \quad (1.51)$$

$\text{Spin}(V)$  heißt die Spin-Gruppe von  $V$ .

Die Gruppen-Multiplikation ist hier durch die Multiplikation in der Clifford-Algebra gegeben. Man kann  $\text{Spin}(V)$  auch gewinnen, wenn  $\mathcal{C}_\pm^0(V, g)$  als Lie-Algebra betrachtet und dann zu der zugehörigen Lie-Gruppe konstruiert (s. [BGV]).

Für die Spin-Gruppe gilt die folgende Eigenschaft:

**Theorem 1.6.** Sei  $\mathcal{C}_\pm(V, g)$  eine Clifford-Algebra und  $\text{Spin}(V)$  die zugehörige Spin-Gruppe, so gilt:

1. Ist  $\dim V \geq 2$ , so ist  $\text{Spin}(V)$  die zweifache Überlagerung von  $SO(V)$ .
2. Ist  $\dim V \geq 3$ , so ist  $\text{Spin}(V)$  die zweifache universelle Überlagerung von  $SO(V)$ .

Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Fr] Kap. 1.4.

Mit diesem Satz ergibt sich im Fall  $\dim V \geq 2$  eine natürliche Darstellung von  $\text{Spin}(V)$  auf  $V$  mittels der (universellen) Überlagerung  $\tau$ :

$$\tau : \text{Spin}(V) \longrightarrow SO(V) \subset \text{End}(V). \quad (1.52)$$

Eine weitere natürliche Darstellung von  $\text{Spin}(V)$  ist die *Spinor-Darstellung* auf dem Spinor-Modul  $S$ :

$$c_\pm : \text{Spin}(V) \subset \mathcal{C}_\pm(V) \longrightarrow \text{End}(S). \quad (1.53)$$

### 1.3.2 Clifford-Bündel & Clifford-Modulbündel

In diesem Abschnitt werden die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Begriffe auf Bündel übertragen.

**Definition 1.26.** Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\dim \mathcal{M} = n$ , dann ist das Clifford-Bündel über  $\mathcal{M}$  definiert als das assoziierte Algebren-Bündel

$$\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}) := O(\mathcal{M}) \times_{O(n)} \mathcal{C}_\pm(\mathbb{R}^n). \quad (1.54)$$

Hierbei ist die fundamentale Darstellung von  $O(n)$  auf  $\mathbb{R}^n$  gemeint.

Entsprechend sei:

$$\mathcal{C}_\pm^0(\mathcal{M}) := O(\mathcal{M}) \times_{O(n)} \mathcal{C}_\pm^0(\mathbb{R}^n), \quad (1.55)$$

$$\mathcal{C}_\pm^1(\mathcal{M}) := O(\mathcal{M}) \times_{O(n)} \mathcal{C}_\pm^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.56)$$

Nach (1.35) gilt:  $O(\mathcal{M}) \times_{O(n)} \mathbb{R}^n \cong T\mathcal{M}$ , und da  $\mathcal{M}$  Riemannsch ist gilt weiter:  $T^*\mathcal{M} \cong T\mathcal{M}$ . Da diese Isomorphismen alle kanonisch sind, ist die Faser  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})_x$  von  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  kanonisch isomorph zur Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(T_x^*\mathcal{M})$ . Sei nun  $\Lambda T^*\mathcal{M}$  das Grassmann-Bündel über  $\mathcal{M}$ , so ist die Bündel-Abbildung  $(\mathbf{c}_\pm, \text{id}_\mathcal{M})$ , wobei  $\mathbf{c}_\pm$  faserweise durch die Quantisierungsabbildungen  $\mathbf{c}_{\pm x} : \Lambda T_x^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}_\pm(T_x^*\mathcal{M})$  gegeben ist, ein Vektorbündel-Isomorphismus. Analog wie im vorhergehenden Abschnitt lassen sich  $T^*\mathcal{M}$  und  $\Lambda T^*\mathcal{M}$  in  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  einbetten, und wir werden wieder die Elemente von  $T^*\mathcal{M}$  bzw.  $\Lambda T^*\mathcal{M}$  mit den eingebetteten Elementen identifizieren.

Weiter hat man:

**Definition 1.27.** Seien  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  ein Clifford-Bündel und  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes  $\mathbb{K}$ -Vektorbündel über  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{E}$  heißt ein Clifford-Modulbündel, wenn es eine glatte Bündel-Abbildung  $(c_\pm, \text{id}_\mathcal{M})$  gibt mit  $c_\pm : \mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ , so dass für die durch  $c_\pm$  induzierte Links-Aktion

$$\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}) \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

gilt:

$$\mathcal{C}_\pm^0(\mathcal{M})\mathcal{E}^\pm \subset \mathcal{E}^\pm, \quad \mathcal{C}_\pm^1(\mathcal{M})\mathcal{E}^\pm \subset \mathcal{E}^\mp. \quad (1.57)$$

Faserweise habe  $c_\pm$  die Eigenschaft:

$$\begin{aligned} c_{\pm x} : \mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}) &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{E})_x \\ a &\longmapsto c_{\pm x}(a) \end{aligned} \quad (1.58)$$

mit

$$c_{\pm x}(a) \circ c_{\pm x}(a) = \pm g_x(a, a) \text{id}_\mathcal{E}, \quad \forall a \in T_x^*\mathcal{M}. \quad (1.59)$$

$c_\pm$  heiße Clifford-Aktion.

Die induzierte Links-Aktion auf  $\mathcal{E}$   $\Gamma(\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})) \times \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$  mit  $(\sigma, \psi) \mapsto \sigma\psi$  definiert durch  $(\sigma\psi)(x) := (c_\pm \circ \sigma(x))\psi(x)$   $x \in \mathcal{M}$  werde wieder mit  $c_\pm$  bezeichnet.

**Definition 1.28.** Seien  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  ein Clifford-Modulbündel über  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{W}$  ein Vektorbündel über  $\mathcal{M}$ , so ist das getwistete Clifford-Modulbündel  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{W}, \tilde{c}_\pm)$  definiert durch die Clifford-Aktion:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\pm : \mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}) &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{W}) \\ \alpha &\longmapsto c_\pm(\alpha) \otimes_{\mathcal{M}} \text{id}_\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Es lässt sich nun eine Entsprechung zum Spinor-Modul für Bündel definieren. Hierzu braucht man zunächst:

**Definition 1.29.** *Eine Spin-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist ein  $\text{Spin}(n)$ -Prinzipalbündel über  $\mathcal{M}$  für das gilt:*

$$T^*\mathcal{M} \cong \text{Spin}(\mathcal{M}) \times_{\text{Spin}(n)} \mathbb{R}^n. \quad (1.61)$$

*Besitzt  $\mathcal{M}$  eine Spin-Struktur, so heißt  $\mathcal{M}$  Spin-Mannigfaltigkeit.*

Zu Spin-Strukturen sei angemerkt, dass diese nicht für beliebige Mannigfaltigkeiten existieren. Für die Existenz gibt es topologische Obstruktionen, wie z.B., dass  $\mathcal{M}$  orientierbar sein muss, und das Verschwinden bestimmter charakteristischer Klassen (s. z.B. [BGV] Kap. 3.3). Auch sind Spin-Strukturen im Allgemeinen nicht eindeutig.

Man definiert weiter:

**Definition 1.30.** *Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit Spin-Struktur  $\text{Spin}(\mathcal{M})$ , dann ist das Spinor-Bündel  $\mathcal{S}$  definiert durch:*

$$\mathcal{S} := \text{Spin}(\mathcal{M}) \times_{\text{Spin}(n)} S. \quad (1.62)$$

*$S$  ist der Spinor-Modul zur Clifford-Algebra  $\mathcal{C}_\pm(\mathbb{R}^n)$ , und die zur Konstruktion benötigte Darstellung ist die Spinor-Darstellung.*

Für den Fall von Spin-Mannigfaltigkeit gilt ein analoger Satz zu 1.6:

**Theorem 1.7.** *Sei  $\mathcal{E}$  ein Clifford-Modulbündel über einer Spin-Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit treuer Clifford-Aktion, dann ist  $\mathcal{E}$  ein getwistetes Clifford-Modulbündel der Form:*

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}. \quad (1.63)$$

*$\mathcal{S}$  ist das Spinor-Bündel über  $\mathcal{M}$ .*

Zum Beweis sei wieder auf [BGV] Kapitel 3.3 verwiesen.

Aufgrund des obigen Satzes bezeichnen wir auch Clifford-Modulbündel über Spin-Mannigfaltigkeiten gerader Dimension als *getwistete Spinor-Bündel*.

### 1.3.3 Clifford-Zusammenhänge

In diesem Abschnitt werden Zusammenhänge auf Clifford-Modulbündeln betrachte, wobei hier insbesondere Clifford-Zusammenhänge behandelt werden, für die hier die Struktur in einer lokalen Trivialisierung hergeleitet wird. An dieser Stelle treten zum ersten Mal von der Vorzeichenwahl in der Clifford-Algebra abhängige Unterschiede auf. Zunächst sei angemerkt, dass auf dem Clifford-Modulbündel  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  ein ausgezeichneter Zusammenhang existiert. Es handelt sich hierbei um den mit Hilfe der Quantisierungsabbildung auf  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  fortgesetzten Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla^{LC}$  von  $\mathcal{M}$ . Des Weiteren soll sich der Ausdruck *lokal* immer auf lokale Trivialisierungen beziehen.

**Definition 1.31.** *Seien  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  ein Clifford-Modulbündel über einer Riemannschen-Mannigfaltigkeit und  $\nabla^\mathcal{E} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{M})$  ein gerader Zusammenhang.  $\nabla^\mathcal{E}$  heißt Clifford-Zusammenhang, wenn gilt:*

$$[\nabla_X^\mathcal{E}, c_\pm(a)] = c_\pm(\nabla_X^{LC} a), \quad \forall a \in \Gamma(\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})) \quad \forall X \in \Gamma(T\mathcal{M}). \quad (1.64)$$



$[\cdot, \cdot]$  sei der Kommutator auf  $\Gamma(\text{End}(\mathcal{E}))$ . Weiter sei:

$$\mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E}) := \{ \nabla^\mathcal{E} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{E}) \mid \nabla^\mathcal{E} \text{ Clifford-Zusammenhang} \}. \quad (1.65)$$

Es gilt dann folgendes Lemma:

**Lemma 1.5.** Sei  $\nabla^\mathcal{E} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E})$  ein Clifford-Zusammenhang mit der lokalen Form  $\nabla^\mathcal{E} = dx^\mu \otimes \nabla_\mu^\mathcal{E}$  bezüglich einer Trivialisierung  $(U, \phi)$ . So gilt:

$$\nabla_\mu^\mathcal{E} = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ij} c_+^{ij} + A_\mu, \quad \text{für } c_+^i c_+^j + c_+^j c_+^i = 2\eta^{ij}, \quad (1.66)$$

$$\nabla_\mu^\mathcal{E} = \partial_\mu - \frac{1}{4} \omega_{\mu ij} c_-^{ij} + A_\mu, \quad \text{für } c_-^i c_-^j + c_-^j c_-^i = -2\eta^{ij} \quad (1.67)$$

mit  $A_\mu \in \Omega^0(U, \text{End}^+(\mathcal{E}))$   $[A_\mu(x), c_\pm(a(x))] = 0, \forall a \in \Gamma(\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M}))$ . Hier seien  $e^1, \dots, e^n$  eine lokale Orthonormalbasis von  $T^*\mathcal{M}$  und  $c_\pm^i := c_\pm(e^i)$ ,  $c_\pm^{ij} := \frac{1}{2}[c_\pm^i, c_\pm^j]$ . Des Weiteren seien  $\omega_{\mu ij} := \omega_\mu^k{}_j \eta_{kj}$  definiert durch

$$\nabla_\mu^{LC} e^i =: -\omega_\mu^i{}_j e^j. \quad (1.68)$$

$\eta^{ij}$  seien die Komponenten der Metrik in der Basis  $e^1, \dots, e^n$ . Hierbei beziehen sich die Indizes  $i, j, k, \ell$  auf Orthonormalbasen, während sich der Index  $\mu$  auf Koordinatenbasen bezieht.

**Beweis:** Wenn das Clifford-Modulbündel  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  einen Zusammenhang besitzt, so ist seine lokale Form:

$$\nabla_\mu^\mathcal{E} = \partial_\mu + \Omega_\mu, \quad \Omega_\mu(x) \in \text{End}(\mathcal{E}_x).$$

Da  $\nabla_\mu^\mathcal{E}$  ein Clifford-Zusammenhang ist, muss gelten:

$$-\omega_\mu^i{}_j c_\pm^j = c_\pm(\nabla_\mu^{LC} e^i) = [\nabla_\mu^\mathcal{E}, c_\pm^i] = [\partial_\mu, c_\pm^i] + [\Omega_\mu, c_\pm^i].$$

Da die  $c_\pm^i$  lokal immer durch die gleichen Matrizen beschrieben werden, sind sie lokal konstant. Damit gilt dann  $[\partial_\mu, c_\pm^i] = 0$  und man erhält:

$$[\Omega_\mu, c_\pm^i] = -\omega_\mu^i{}_j c_\pm^j.$$

Betrachtet man diese Gleichung an einem festen Punkt  $x \in U$  und faßt die Komponenten von  $\Omega_\mu$  als Variablen auf, so ist die Gleichung ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum sich aus einer inhomogenen Lösung des Systems und dem Lösungsraum des homogenen Systems

$$[\Omega_\mu, c_\pm^i] = 0$$

zusammensetzt.

Eine Lösung für die inhomoge Gleichung erhält man mit dem Ansatz:

$$\Omega_\mu = \pm \frac{1}{4} \omega_{\mu ij} c_\pm^{ij}$$

Da  $\omega_{\mu k \ell}$  die Koeffizienten eines Riemannschen Zusammenhangs bzgl. einer Orthonormalbasis sind, gilt:  $\omega_{\mu k \ell} = -\omega_{\mu \ell k}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned}
[\Omega_\mu, c_\pm^i] &= [\pm \frac{1}{4} \omega_{\mu k \ell} c_\pm^k c_\pm^\ell, c_\pm^i] \\
&= \pm \frac{1}{4} \omega_{\mu k \ell} (c_\pm^k c_\pm^\ell c_\pm^i - c_\pm^i c_\pm^k c_\pm^\ell) \\
&= \pm \frac{1}{4} \omega_{\mu k \ell} (c_\pm^k c_\pm^\ell c_\pm^i - c_\pm^k c_\pm^\ell c_\pm^i \mp 2\eta^{ik} c_\pm^\ell \pm 2\eta^{i\ell} c_\pm^k) \\
&= \pm \frac{1}{2} (\mp \omega_{\mu k \ell} \eta^{ik} c_\pm^\ell \pm \omega_{\mu k \ell} \eta^{i\ell} c_\pm^k).
\end{aligned}$$

Mit  $\omega_{\mu k \ell} = -\omega_{\mu \ell k}$  folgt:

$$[\Omega_\mu, c_\pm^i] = \pm \frac{1}{2} (\mp \omega_\mu^i{}_\ell c_\pm^\ell \mp \omega_\mu^i{}_\ell c_\pm^\ell) \quad (1.69)$$

$$= -\omega_\mu^i{}_\ell c_\pm^\ell. \quad (1.70)$$

Die Lösungen des homogenen Systems sind alle  $A_\mu(x) \in \text{End}(\mathcal{E}_x)$ , die die Bedingung

$$[A_\mu(x), c_\pm(a(x))] = 0, \quad \forall a \in \Gamma(\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})).$$

erfüllen. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Wenn man sich nun auf den Fall von Clifford-Modulbündeln  $\mathcal{E}$  über Spin-Mannigfaltigkeiten gerader Dimension beschränkt, so ist  $\mathcal{E}$  nach Theorem 1.7 ein getwistetes Spinor-Modulbündel  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$ . Des Weiteren existiert ein Spin-Zusammenhang  $\nabla^S$ , der gerade die Relation

$$[\nabla_\mu^S, c_\pm(a)] = c_\pm(\nabla_\mu^{LC} a) \quad (1.71)$$

erfüllt. Somit ist der Produktzusammenhang  $\nabla^S \otimes \mathbf{1}_\mathcal{W} + \mathbf{1}_\mathcal{S} \otimes \nabla^\mathcal{W}$  ein Clifford-Zusammenhang auf  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$ , wobei  $\nabla^\mathcal{W} \in \mathcal{A}(\mathcal{W})$ , so dass die Existenz eines Clifford-Zusammenhangs für getwistete Spinor-Bündel gesichert ist. Die lokale Form eines Spin-Zusammenhangs lässt sich aus Lemma 1.5 gewinnen, wenn man  $A_\mu \equiv 0$  wählt. Ferner sollte noch festgehalten werden, dass im Fall eines getwisteten Spinor-Bündel  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$ , ein Clifford-Zusammenhang die Struktur eines Produkt-Zusammenhangs hat (s. z.B. [Tol2]) :

$$\nabla^{\mathcal{E} \otimes \mathcal{W}} = \nabla^S \otimes \mathbf{1}_\mathcal{W} + \mathbf{1}_\mathcal{S} \otimes \nabla^\mathcal{W}, \quad \nabla^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{W}} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{W}). \quad (1.72)$$

Des Weiteren ist auf einem getwisteten Spinor-Bündel die *getwistete Krümmung* gegeben durch (s. [BGV]):

$$F^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} := (\nabla^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{W}})^2 - (\nabla^S)^2 \otimes \mathbf{1}_\mathcal{W} = \mathbf{1}_\mathcal{S} \otimes F^\mathcal{W}. \quad (1.73)$$

$F^\mathcal{W}$  ist die zu  $\nabla^\mathcal{W}$  gehörende Krümmungs-2-Form. Hierzu ist anzumerken, dass die hier gegebene Definition nur auf getwistete Spinor-Bündel anwendbar ist. Eine allgemeinere Definition findet sich in [BGV].

Mit dem Begriff des Clifford-Zusammenhangs lässt sich die kanonische 1-Form definieren (s. [Ack,Tol], [Tol], [Ack]):

**Definition 1.32.** Sei  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  ein Clifford-Modulbündel zum Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$  gerader Dimension. Dann ist die kanonische 1-Form  $\xi_1 \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E}))$  lokal gegeben durch:

$$\xi_1 := \pm \frac{1}{n} g_{ij} dx^i \otimes c_\pm(dx^j), \quad n := \dim \mathcal{M}. \quad (1.74)$$

Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

**Lemma 1.6.** Seien  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  ein Clifford-Modulbündel und  $\xi_1 \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E}))$  die kanonische 1-Form aus Definition 1.32. Dann gilt:

$$1. \quad c_\pm(\xi_1) = \mathbf{1}_\mathcal{E}, \quad (1.75)$$

$$2. \quad \nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \text{End}(\mathcal{E})} \xi_1 = 0, \quad (1.76)$$

wobei  $\nabla^{T^*\mathcal{M} \otimes \text{End}(\mathcal{E})}$  der von einem Clifford-Zusammenhang  $\nabla^\mathcal{E}$  induzierte Zusammenhang auf dem Tensor Bündel  $T^*\mathcal{M} \otimes \text{End}(\mathcal{E})$  ist.

Für die Beweise sei auf [Ack,Tol] bzw. [Ack] verwiesen.

## 1.4 Dirac-Operatoren und Clifford-Modulbündel

In diesem Abschnitt wird der Begriff des verallgemeinerte Dirac-Operator, das grundlegende Objekt für die nachfolgende Konstruktion, eingeführt. Es werden seine fundamentalen Eigenschaften und Beziehungen zu Zusammenhängen dargestellt. Ausführliche Darstellungen hierzu finden sich z.B. in [BGV].

**Definition 1.33.** Seien  $\mathcal{E}$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduieretes Vektorbündel und

$$D : \Gamma(\mathcal{E}^\pm) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}^\mp) \quad (1.77)$$

ein ungerader Differential-Operator der Ordnung eins.  $D$  heißt ein (verallgemeinerter) Dirac-Operator, wenn  $D^2$  ein verallgemeinerter Laplace-Operator ist.

Wenn man nun den Fall eines Clifford-Modulbündels  $(\mathcal{E}, c_\pm)$  untersucht und die bezüglich der  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung geraden Zusammenhänge betrachtet, so liefert die Sequenz von Abbildungen

$$D : \Gamma(\mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla^\mathcal{E}} \Gamma(T^*\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})) \xrightarrow{c_\pm} \Gamma(\mathcal{E}) \quad (1.78)$$

mit  $\nabla^\mathcal{E} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{E})$  einen Dirac-Operator (s. [BGV]).

Diese Tatsache legt nahe, dass Verbindungen zwischen einem Dirac-Operator  $D$  auf einem Clifford-Modulbündel und der Struktur, die durch die Clifford-Aktion gegeben wird, bestehen. Dazu sei folgendes Lemma angegeben (s. [BGV] Kap. 3.3 Prop. 3.38):

**Lemma 1.7.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, so existiert auf  $\mathcal{E}$  ein Dirac-Operator genau dann, wenn  $\mathcal{E}$  ein Clifford-Modulbündel ist.

**Beweis:** Wir geben hier einen Beweis, der die explizite Konstruktion von Clifford-Aktionen aus Dirac-Operatoren verdeutlicht.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \otimes \mathcal{E}^-$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes Vektorbündel mit Dirac-Operator  $D$ . Dann sei eine Clifford-Aktion  $c_{\pm} : \Gamma(\mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M})) \rightarrow \Gamma(\text{End}(\mathcal{E}))$  definiert durch:

$$\begin{aligned} c_{\pm} : \Gamma(\mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M})) \times \Gamma(\mathcal{E}) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}) \\ (df, \psi) &\longmapsto c_{\pm}(df)\psi := [D, f]\psi. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Dabei ist  $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$  und  $d$  das äußere Differential auf  $\mathcal{M}$ . Da sich  $\Gamma(T^*\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbf{c}} \Gamma(\mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M}))$  mittels der Quantisierungsabbildung  $\mathbf{c}$  einbetten lässt, lässt  $df$  sich als Element von  $\mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M})$  auffassen. Um zu zeigen, dass die obige Gleichung eine Clifford-Aktion definiert, reicht es zu zeigen:

$$c_{\pm}(df)^2\psi = \pm g(df, df)\psi, \quad \forall f \in C^{\infty}(\mathcal{M}), \psi \in \Gamma(\mathcal{E})$$

Um sich hiervon zu überzeugen, überlegt man sich, dass  $D$  lokal die Struktur

$$D = a^i \partial_i + b, \quad a^i(x), b(x) \in \text{End}^-(\mathcal{E}_x),$$

besitzt. Damit folgt:

$$[D, f] = [a^i \partial_i, f] + [b, f] = a^i (\partial_i f).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} c_{\pm}(df)^2\psi &= [D, f][D, f]\psi = a^i (\partial_i f) a^j (\partial_j f) \psi \\ &= a^i a^j (\partial_i f) (\partial_j f) = \frac{1}{2} (a^i a^j + a^j a^i) (\partial_i f) (\partial_j f). \end{aligned}$$

Für  $D^2$  erhält man lokal:

$$\begin{aligned} D^2 &= (a^i \partial_i + b)(a^j \partial_j + b) \\ &= a^i \partial_i a^j \partial_j + \text{Terme niedrigerer Ord. in } \partial_k \\ &= a^i a^j \partial_i \partial_j + \text{Terme niedrigerer Ord. in } \partial_k \\ &= \frac{1}{2} (a^i a^j + a^j a^i) \partial_i \partial_j + \text{Terme niedrigerer Ord. in } \partial_k. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun das Hauptsymbol, so erhält man:

$$\sigma(D^2)(x, \xi) = \pm g^{ij}(x) \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} (a^i(x) a^j(x) + a^j(x) a^i(x)) \xi_i \xi_j.$$

Somit gilt:

$$\pm g^{ij} = \frac{1}{2} (a^i a^j + a^j a^i) \quad \Rightarrow \quad c_{\pm}(df)^2 = \pm g(df, df).$$

„ $\Leftarrow$ “ Seien nun  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel und  $\nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{M})$  ein gerader Zusammenhang, so ist

$$D_{\nabla^{\mathcal{E}}} := c_{\pm} \circ \nabla^{\mathcal{E}}$$

nach den Vorbemerkungen ein verallgemeinerter Dirac-Operator.  $\square$

Das vorangegangene Lemma zeigt, dass sich Dirac-Operatoren Clifford-Modul-Strukturen induzieren und umgekehrt. Aus diesem Grund sind Dirac-Operatoren interessant, die mit einer gegebenen Clifford-Modul-Struktur auf einem Bündel verträglich sind. Dies motiviert die Definition:

**Definition 1.34.** Sei  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel. Ein verallgemeinerter Dirac-Operator  $D$  heißt kompatibel mit der Clifford-Aktion  $c_{\pm}$ , wenn gilt:

$$[D, f]\psi = c_{\pm}(df)\psi, \quad \forall f \in C^{\infty}(\mathcal{M}), \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{E}). \quad (1.80)$$

Ferner sei:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \{D \mid D \text{ verallgem. Dirac-Op. } \mathcal{E} \text{ kompatibel mit } (\mathcal{E}, c_{\pm})\}. \quad (1.81)$$

Die Kompatibilitätseigenschaft (1.80) stellt gerade sicher, dass die durch den Dirac-Operator  $D$  induzierte Clifford-Modul-Struktur gerade die Clifford-Modul-Struktur von  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ist.

Aufgrund der Konstruktion im vorangegangenen Lemma stellt sich darüber hinaus die Frage, ob sich auf einem Clifford-Modulbündel jeder verallgemeinerte Dirac-Operator als Verkettung eines geraden Zusammenhanges und der Quantisierungsabbildung darstellen lässt. Die Antwort hierauf gibt das folgende Lemma (s. [Ack,Tol]), wofür aufgrund seiner Wichtigkeit ein Beweis mitangeben wird.

**Lemma 1.8.** Seien  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel und  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator auf  $\mathcal{E}$ , so gilt: Es gibt ein  $\nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{M})$  mit

$$D = c_{\pm} \circ \nabla^{\mathcal{E}}. \quad (1.82)$$

**Beweis:** Sei zunächst  $\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}^+(\mathcal{M})$  ein beliebiger Zusammenhang. Dann sei:

$$D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}} := c_{\pm} \circ \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}.$$

Nach den Vorbemerkungen ist  $D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}}$  ein verallgemeinerter Dirac-Operator und nach Konstruktion kompatibel mit der Clifford-Aktion. Dann gilt:

$$[D - D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}}, f] = c_{\pm}(df) - c_{\pm}(df) = 0, \quad \forall f \in C^{\infty}(\mathcal{M}).$$

Somit muss  $D - D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}}$  ein ungerader Differential-Operator nullter Ordnung sein. Also gilt:

$$D - D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}} \in \text{End}^-(\mathcal{E}).$$

Seien nun  $\xi_1$  die kanonische 1-Form aus Definition 1.32 und  $\omega := D - D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}}$ , so ist:

$$\xi_1 \wedge \omega \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}^+(\mathcal{E})),$$

da  $\xi_1$  bezüglich der Graduierung ungerade ist. Dann sei:

$$\nabla^{\mathcal{E}} := \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} + \xi_1 \wedge \omega \in \mathcal{A}^+(\mathcal{E}).$$

Damit ergibt sich:

$$c_{\pm} \circ \nabla^{\mathcal{E}} = c_{\pm}(\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} + \xi_1 \wedge \omega) = c_{\pm} \circ \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} + c_{\pm}(\xi_1)\omega = D_{\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}}} + \omega = D.$$

□

Dieses im obigen Beweis gegebene Verfahren lässt sich elegant, in der Dirac-Form zusammenfassen (s. [Tol2]).

**Definition 1.35.** Seien  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel,  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator,  $\nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E})$  und  $\xi_1$  die kanonische 1-Form, so heißt

$$\omega_{\nabla^{\mathcal{E}}} := \xi_1 \wedge (D - c_{\pm} \circ \nabla^{\mathcal{E}}) \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}^+(\mathcal{E})) \quad (1.83)$$

die Dirac-Form von  $D$  zum Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}}$ .

Damit ist der Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}}$ , der den Dirac-Operator  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  erzeugt, gegeben durch:  $\nabla^{\mathcal{E}} = \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} + \omega_{\nabla^{\mathcal{E}}}$  mit  $\tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E})$ .

Es zeigt sich allerdings, dass die Beziehung zwischen Zusammenhängen und verallgemeinerten Dirac-Operatoren nicht eindeutig ist, da  $c_{\pm}$  einen nicht trivialen Kern besitzt. Seien  $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}^-(\mathcal{E}))$ ,  $\xi_1$  die kanonische 1-Form und  $\alpha_{\omega} := \omega - \xi_1 \wedge c_{\pm}(\omega)$ , so ist  $\alpha_{\omega} \in \ker(c_{\pm})$  aufgrund von Lemma 1.6. Es gibt also zu jedem  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  eine ganze Klasse von Zusammenhängen  $[\nabla^{\mathcal{E}}]$  mit  $c_{\pm} \circ \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} = D$ ,  $\forall \tilde{\nabla}^{\mathcal{E}} \in [\nabla^{\mathcal{E}}]$ , wobei die Klassen  $[\nabla^{\mathcal{E}}]$  durch die Äquivalenzrelation

$$\nabla'^{\mathcal{E}} \sim \nabla^{\mathcal{E}} :\Leftrightarrow \nabla'^{\mathcal{E}} - \nabla^{\mathcal{E}} \in \ker c_{\pm} \quad (1.84)$$

definiert sind.

Für Details siehe [Tol], [Tol2]. Weiter zeigt sich, dass es in einigen Äquivalenzklassen kanonische Repräsentanten gibt. Dafür definiert man (s. [Tol]):

**Definition 1.36.** Sei  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel, so heißt  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein Standard-Dirac-Operator (SDO), wenn ein Clifford-Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E})$  existiert mit:

$$D = c_{\pm} \circ \nabla^{\mathcal{E}}. \quad (1.85)$$

Wie in [Tol] gezeigt wurde, gilt:

**Lemma 1.9.** Sei  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modul-Bündel. Dann liegt in jeder Zusammenhangsklasse von Definition 1.36 höchstens ein Clifford-Zusammenhang.

Allerdings liegt nicht in jeder Äquivalenzklasse ein Clifford-Zusammenhang. Die Klassen ohne Clifford-Zusammenhang erzeugen die *nicht Standard-Dirac-Operatoren*, die eine bedeutende Rolle bei der Konstruktion von Dirac-Modellen spielen.

Es sei noch erwähnt, dass es einen alternativen Zugang zu verallgemeinerten Dirac-Operatoren gibt, und zwar über Superzusammenhänge.

**Definition 1.37.** Sei  $\mathcal{E}$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes Vektorbündel. Ein ungerader Differential-Operator erster Ordnung

$$\mathbb{A}^{\mathcal{E}} : [\Omega^*(\mathcal{M}, \mathcal{E})]^{\pm} \longrightarrow [\Omega^*(\mathcal{M}, \mathcal{E})]^{\mp}, \quad (1.86)$$

der eine graduierte Derivation auf dem  $\Omega^*(\mathcal{M})$ -Links-Modul  $\Omega^*(\mathcal{M}, \mathcal{E})$  ist, mit

$$\mathbb{A}^{\mathcal{E}}(\lambda \wedge \alpha) = d\lambda \wedge \alpha + (-1)^{|\lambda|} \lambda \wedge \mathbb{A}^{\mathcal{E}}\alpha, \quad \forall \lambda \in \Omega^*(\mathcal{M}), \quad \Omega^*(\mathcal{M}, \mathcal{E}), \quad (1.87)$$

heißt Superzusammenhang.

Sei  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  ein Clifford-Modulbündel, und es gelte:

$$[\mathbb{A}^{\mathcal{E}}, c_{\pm}(a)] = c_{\pm}(\nabla^{LC} a), \quad a \in \Gamma(\mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M})), \quad (1.88)$$

so heißt  $\mathbb{A}^{\mathcal{E}}$  ein Clifford-Superzusammenhang (CSC).

Für Clifford-Superzusammenhänge und kompatible Dirac-Operatoren auf Clifford-Modulbündeln gilt:

Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ , so existiert genau ein CSC  $\mathbb{A}^{\mathcal{E}}$  mit

$$D = c_{\pm} \circ \mathbb{A}^{\mathcal{E}}. \quad (1.89)$$

Ausführliche Darstellungen hierzu finden sich in [BGV]. Weiter wird die *Superkrümmung* durch  $\mathbb{A}^{\mathcal{E}^2}$  definiert (s. [BGV]), und auf getwisteten Spinor-Bündeln ist die *getwistete Superkrümmung*  $\mathcal{R}^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}$  gegeben durch:

$$\mathcal{R}^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} := \mathbb{A}^{\mathcal{E}^2} - (\nabla^{\mathcal{S}})^2 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{W}}. \quad (1.90)$$

Auch hier ist anzumerken, dass die obige Formel, wie im Fall der getwisteten Krümmung, nur für getwistete Spinor-Bündel gilt.

## Kapitel 2

# Die Lichnerowicz-Zerlegung

In diesem Kapitel sollen die Eigenschaften der so genannten Lichnerowicz-Zerlegung von kompatiblen Dirac-Operatoren  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  auf dem Clifford-Modulbündel  $(\mathcal{E}, c_{\pm})$  betrachtet werden. Bei der Lichnerowicz-Zerlegung geht es darum, dass sich jeder verallgemeinerte Laplace-Operator  $\Delta$  auf folgende Weise darstellen lässt:

$$\Delta = \Delta^{\nabla} + \mathcal{V}, \quad (2.1)$$

wobei  $\Delta^{\nabla}$  ein Zusammenhangs-Laplace-Operator zum Zusammenhang  $\nabla$  ist und  $\mathcal{V} \in \Gamma(\text{End}^+(\mathcal{E}))$  ein *Potential(term)*. Da  $D^2$  ein verallgemeinerter Laplace-Operator ist, existiert somit eine Zerlegung der Art

$$D^2 = \pm \Delta^{\nabla} + \mathcal{V}. \quad (2.2)$$

Als Referenz siehe hierzu [BGV] Kapitel 3.

Die Lichnerowicz-Zerlegung ist in der Literatur weithin bekannt (s. z.B. [BGV], [Gi]). Allerdings werden dort die Lichnerowicz-Zerlegung nur Spezialfälle wie z.B. Standard-Dirac-Operatoren diskutiert und für den Potentialterm explizite Formeln angegeben, die auch allgemein als Lichnerowicz-Formeln bezeichnet werden. Eine explizite Bestimmung des Potentialterms für nicht Standard-Dirac-Operatoren findet sich zuerst in [Ack,Tol].

Es soll nun die Lichnerowicz-Zerlegung für nicht Standard-Dirac-Operatoren auf Clifford-Modulbündeln des Typs  $(\mathcal{E}, c_+)$  betrachtet und eine lokale Form für das Potential  $\mathcal{V}$  bestimmt werden. Der Fall für Clifford-Modulbündel vom Typ  $(\mathcal{E}, c_-)$  ist in der Literatur ausführlich diskutiert und lokale Ausdrücke sind bestimmt worden (siehe hierzu [Ack,Tol], [Ack], [Tol2]). Es stellt sich heraus, dass die lokalen Ausdrücke für das Potential für beide Typen von Clifford-Modulbündeln zwar die gleiche Struktur haben, sich aber in relativen Vorzeichen einzelner Summanden unterscheiden. Es wird hierfür eine ausführliche Rechnung angegeben, damit die Vorzeichenunterschiede nachvollziehbar werden. Es zeigt sich darüberhinaus, dass das Vorzeichen in der Zerlegung (2.2) vor dem Zusammenhangs-Laplace-Operator einmal vom Typ der gewählten Clifford-Algebra und von dem konventionellen Vorzeichen in der Definition des Laplace-Operators abhängt. In diesem Abschnitt wird die Definition

$$\Delta^{\nabla} := -g^{ij}(\nabla_i \nabla_j - \Gamma_{ij}^k \nabla_k) \quad (2.3)$$

gewählt.



Des Weiteren werden noch Dirac-Operatoren von einfachem Typ eingeführt und deren grundlegenden Eigenschaften dargestellt.

Zur Vorbereitung wird folgendes Lemma benötigt (s. [Ack,Tol], [Gi], [Ack], [Tol2]):

**Lemma 2.1.** *Sei  $\Delta^\nabla$  ein Zusammenhangs-Laplace-Operator auf einem Vektorbündel  $\mathcal{E}$  zum Zusammenhang  $\nabla$ . Ferner seien  $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E}))$  mit der lokalen Form  $\alpha = dx^i \otimes \alpha_i$  und  $\mathcal{V} \in \Gamma(\text{End}(\mathcal{E}))$ . Dann existieren genau ein Zusammenhang  $\hat{\nabla} = \nabla + \hat{\omega}$ ,  $\hat{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{M}, \text{End}(\mathcal{E}))$  und ein  $\hat{\mathcal{V}} \in \Gamma(\text{End}(\mathcal{E}))$ , so dass gilt:*

$$-\Delta^{\hat{\nabla}} + \hat{\mathcal{V}} = -\Delta^\nabla + \alpha^i \nabla_i + \mathcal{V} \quad (2.4)$$

mit

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2}\alpha \quad (2.5)$$

$$\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} - (g^{ij}({}'\nabla_i \hat{\omega}_j) + g^{ij} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j) \quad (2.6)$$

wobei  $({}'\nabla_i \hat{\omega}_j) := [\nabla_i, \hat{\omega}_j] - \Gamma_{ij}^k \hat{\omega}_k$  gilt.

**Beweis:** Nach den obigen Definitionen gilt:

$$\begin{aligned} -\Delta^{\hat{\nabla}} &= g^{ij}((\nabla_i + \hat{\omega}_i)(\nabla_j + \hat{\omega}_j) - \Gamma_{ij}^k(\nabla_k + \hat{\omega}_k)) \\ &= g^{ij}(\nabla_i \nabla_j - \Gamma_{ij}^k \nabla_k) + g^{ij}(\hat{\omega}_j \nabla_i + \hat{\omega}_i \nabla_j + [\nabla_i, \hat{\omega}_j] - \Gamma_{ij}^k \hat{\omega}_k) \\ &\quad + g^{ij} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \\ &= -\Delta^\nabla + 2g^{ij} \hat{\omega}_i \nabla_j + g^{ij}({}'\nabla_i \hat{\omega}_j) + g^{ij} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j. \quad \square \end{aligned}$$

Damit folgt:

**Lemma 2.2.** *Sei  $\tilde{D}$  ein kompatibler Dirac-Operator auf einem Clifford-Modulbündel  $(\mathcal{E}, \gamma)$ . Hierbei ist  $\gamma$  die Clifford-Aktion des Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$ . Ferner sei eine Zerlegung von  $\tilde{D}$  der folgenden Form gegeben:*

$$\tilde{D} = D + \omega_{\tilde{D}}, \quad (2.7)$$

wobei  $D$  ein Standard Dirac-Operator und  $\omega_{\tilde{D}} \in \Gamma(\text{End}^-(\mathcal{E}))$  sind. Dann existiert ein Zusammenhang  $\hat{\nabla}$  auf  $\mathcal{E}$ , so dass gilt:

$$\tilde{D}^2 = -\Delta^{\hat{\nabla}} + \mathcal{V} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^\mathcal{E} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} [\omega_i, \omega_j] \\ &\quad - \frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^j] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\gamma^k [\omega_k, \gamma^i], \omega_i] - \frac{1}{2} [\gamma^j({}'\nabla_i \omega_j), \gamma^i]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dabei ist  $\nabla$  ein Clifford-Zusammenhang, für den lokal gilt:  $D = \gamma(dx^i \otimes \nabla_i) = \gamma^i \circ \nabla_i =: \gamma^i \nabla_i$ ,  $\omega_{\tilde{D}} = \gamma(dx^i \otimes \omega_i) = \gamma^i \circ \omega_i =: \gamma^i \omega_i$  und  $\gamma^i := \gamma(dx^i)$ ,  $\gamma^{ij} := \frac{1}{2} [\gamma^i, \gamma^j]$  und  $F_{ij}^\mathcal{E} := [\nabla_i, \nabla_j]$  sind die Komponenten der Krümmung von  $\nabla$ . Ferner ist in diesem Fall der Zusammenhangs-Laplace-Operator durch (2.3) definiert. Die Indizes beziehen sich hier auf Koordinatenbasen.  $\mathcal{V}$  hängt nicht von der Zerlegung in Gleichung (2.7) ab.

**Beweis:** Der Beweis läuft analog zu den Rechnungen für den Fall  $(\mathcal{E}, c_-)$  (s. [Ack, Tol]).

Nach den Bemerkungen in Abschnitt 1.4 gilt:

$$\tilde{D} = \gamma^i \nabla_i + \gamma^i \omega_i.$$

Weiter hat man:

$$\tilde{D}^2 = (D + \omega_{\tilde{D}})(D + \omega_{\tilde{D}}) = D^2 + \omega_{\tilde{D}}D + D\omega_{\tilde{D}} + \omega_{\tilde{D}}^2.$$

Man erhält dann:

$$\begin{aligned} D\omega_{\tilde{D}} + \omega_{\tilde{D}}D &= \gamma^i \nabla_i \gamma^j \omega_j + \gamma^i \omega_i \gamma^j \nabla_j \\ &= \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j + \omega_i \nabla_j) + \gamma^i [\nabla_i, \gamma^j] \omega_j + \gamma^i [\omega_i, \gamma^j] \nabla_j \\ &= \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j + \omega_i \nabla_j) - \gamma^i \gamma^j \Gamma_{ij}^k \omega_k + \gamma^i [\omega_i, \gamma^j] \nabla_j. \end{aligned}$$

Hier wurde im letzten Schritt ausgenutzt, dass  $\nabla$  ein Clifford Zusammenhang ist. Des Weiteren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j + \omega_i \nabla_j) &= \gamma^i \gamma^j \nabla_i \omega_j - \gamma^i \gamma^j \omega_j \nabla_i + 2g^{ij} \omega_i \nabla_j \\ &= \gamma^i \gamma^j [\nabla_i, \omega_j] + 2g^{ij} \omega_i \nabla_j. \end{aligned}$$

Setzt man dies nun wieder ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} D\omega_{\tilde{D}} + \omega_{\tilde{D}}D &= \gamma^i \gamma^j ([\nabla_i, \omega_j] - \Gamma_{ij}^k \omega_k) + 2g^{ij} \omega_i \nabla_j + \gamma^i [\omega_i, \gamma^j] \nabla_j \\ &= \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j) + 2g^{ij} \omega_i \nabla_j + \gamma^i [\omega_i, \gamma^j] \nabla_j. \end{aligned}$$

An dieser Stelle zeigt sich als erste der Unterschied zwischen beiden Typen von Clifford-Modulbündeln. Der zweite Summand hat aufgrund der anderen Clifford-Relationen ein anderes Vorzeichen. Weiter ergibt sich:

$$\omega_{\tilde{D}}^2 \equiv \gamma^i \omega_i \gamma^j \omega_j = \gamma^i \gamma^j \omega_i \omega_j + \gamma^i [\omega_i, \gamma^j] \omega_j.$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} D^2 &= \gamma^i \nabla_i \gamma^j \nabla_j = \gamma^i \gamma^j \nabla_i \nabla_j + \gamma^i [\nabla_i, \gamma^j] \nabla_j \\ &= (g^{ij} + \gamma^{ij}) \nabla_i \nabla_j - \gamma^i \gamma^j \Gamma_{ij}^k \nabla_k = g^{ij} (\nabla_i \nabla_j - \Gamma_{ij}^k \nabla_k) + \frac{1}{2} \gamma^{ij} [\nabla_i, \nabla_j] \\ &= -\Delta^\nabla + \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Auch hier zeigt sich ein Vorzeichenunterschied vor dem Term  $\Delta^\nabla$ . Bei diesen Umformungen wurde ausgenutzt, dass  $\Gamma_{ij}^k$  symmetrisch in  $i, j$  ist, da holonome Basen verwendet wurden. Also erhält man nun schlußendlich:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^2 &= -\Delta^\nabla + (2g^{ij} \omega_j + \gamma^j [\omega_j, \gamma^i]) \nabla_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^\mathcal{E} + \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j) + \omega_{\tilde{D}}^2. \end{aligned}$$

Wendet man nun das Lemma 2.1 an, so existiert ein Zusammenhang  $\hat{\nabla}$ , so dass gilt:

$$\tilde{D}^2 = -\Delta^{\hat{\nabla}} + \hat{\mathcal{V}},$$

wobei sich  $\hat{\mathcal{V}}$  nach Lemma 2.1 wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{V}} &= \mathcal{V} - g^{ij}(\nabla_i \hat{\omega}_j) - g^{ij} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j, \\ \hat{\omega}_i &= \omega_i + \frac{1}{2} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^j], \quad (*) \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\mathcal{E}} + \omega_{\tilde{D}}^2 + \gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j).\end{aligned}$$

Setzt man nun für  $\hat{\omega}_i$  in die letzten beiden Summanden von  $\mathcal{V}$  ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}& g^{ij}(\nabla_i \hat{\omega}_j) + g^{ij} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \\ &= g^{ij}(\nabla_i (\omega_j + \frac{1}{2} g_{jk} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k])) \\ & \quad + g^{ij} (\omega_i + \frac{1}{2} g_{ik} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k]) (\omega_j + \frac{1}{2} g_{jk'} \gamma^{\ell'} [\omega_{\ell'}, \gamma^{k'}]) \\ &= g^{ij}(\nabla_j \omega_j) + \frac{1}{2} g^{ij}(\nabla_i g_{jk} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k]) \\ & \quad + g^{ij} (\omega_i \omega_j + \frac{1}{2} g_{jk} \omega_i \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k] + \frac{1}{2} g_{ik} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k] \omega_j \\ & \quad + \frac{1}{4} g_{ik} g_{jk'} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k] \gamma^{\ell'} [\omega_{\ell'}, \gamma^{k'}]) \\ &= g^{ij}(\nabla_i \omega_j) + \frac{1}{2} g^{ij}(\nabla_i g_{jk} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k]) + \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \omega_i \\ & \quad + \frac{1}{2} [\omega_i, \gamma^j [\omega_j, \gamma^i]] + \frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^{k'} [\omega_{k'}, \gamma^j] + g^{ij} \omega_i \omega_j.\end{aligned}$$

Der oben bemerkte Vorzeichenunterschied findet sich im vorletzten Summanden wieder. Setzt man nun für  $\hat{\mathcal{V}}$  ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} [\omega_i, \omega_j] + \gamma^{ij} (\nabla_i \omega_j) - \frac{1}{2} g^{ij} (\nabla_i g_{jk} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k]) \\ & \quad - \frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^{k'} [\omega_{k'}, \gamma^j] - \frac{1}{2} [\omega_i, \gamma^j [\omega_j, \gamma^i]].\end{aligned}$$

Weiter gilt, wegen  $-\frac{1}{2} g^{ij} (\nabla_i g_{jk} \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^k]) = -\frac{1}{2} \gamma^j [(\nabla_i \omega_j), \gamma^i]$ :

$$\begin{aligned}& \gamma^{ij} (\nabla_i \omega_j) - \frac{1}{2} \gamma^j [(\nabla_i \omega_j), \gamma^i] \\ &= \gamma^{ij} (\nabla_i \omega_j) - \frac{1}{2} \gamma^j (\nabla_i \omega_j) \gamma^i + \frac{1}{2} \gamma^j \gamma^i (\nabla_i \omega_j) \\ &= \gamma^{ij} (\nabla_i \omega_j) - \frac{1}{2} (\gamma^i \gamma^j (\nabla_i \omega_j) - \gamma^j \gamma^i (\nabla_i \omega_j) + [\gamma^j (\nabla_i \omega_j), \gamma^i]) \\ &= -\frac{1}{2} [\gamma^j (\nabla_i \omega_j), \gamma^i],\end{aligned}$$

da  $\gamma^{ij} = \frac{1}{2} [\gamma^i, \gamma^j]$  gilt. Nimmt man nun alles zusammen, so ergibt sich die behauptete Form des Potentialterms.

Die Unabhängigkeit von Zerlegung (2.7) erhält man wie folgt (s. [Ack,Tol], [Tol]): Seien zwei Zerlegungen gegeben:

$$\tilde{D} = D + \omega_{\tilde{D}} = \gamma^i \nabla_i + \gamma^i \omega_i, \quad \tilde{D}' = D' + \omega'_{\tilde{D}} = \gamma^i \nabla'_i + \gamma^i \omega'_i.$$

Dann gilt nach dem oben Gesagten:

$$\tilde{D}^2 = -\Delta^{\hat{\nabla}} + \mathcal{V} = -\Delta^{\hat{\nabla}'} + \mathcal{V}' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} - \mathcal{V}' = \Delta^{\hat{\nabla}} - \Delta^{\hat{\nabla}'}$$

Betrachtet man nun  $\alpha_i := \nabla'_i + \omega'_i - (\nabla_i + \omega_i)$ , so erhält man mit (\*):

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}'_i - \hat{\nabla}_i &= \nabla'_i + \omega'_i - (\nabla_i + \omega_i) + \frac{1}{2}g_{ij}\gamma^k[\omega'_k - \omega_k, \gamma^j] \\
&= \nabla'_i + \omega'_i - (\nabla_i + \omega_i) + \frac{1}{2}g_{ij}\gamma^k[\nabla'_k - \nabla_k + \omega'_k - \omega_k, \gamma^j], \\
&\quad \text{da } \nabla', \nabla \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E}) \text{ gilt } [\nabla'_k - \nabla_k, \gamma^j] = 0 \\
&= \alpha_i + \frac{1}{2}g_{ij}\gamma^k[\alpha_k, \gamma^j] \\
&= \alpha_i + \frac{1}{2}g_{ij}(\gamma^k\alpha_k\gamma^j - \gamma^k\gamma^j\alpha_k) \\
&= \alpha_i + \frac{1}{2}g_{ij}(\gamma^k\alpha_k\gamma^j + \gamma^j\gamma^k\alpha_k - 2g^{kj}\alpha_k) \\
&= \frac{1}{2}g_{ij}[\gamma^k\alpha_k, \gamma^j] \\
&= 0, \quad \text{da } \gamma^k\alpha_k = \tilde{D} - \tilde{D} = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\hat{\nabla}' = \hat{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \Delta^{\hat{\nabla}'} = \Delta^{\hat{\nabla}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}'. \quad \square$$

Zum Vergleich wird noch das Ergebnis für Clifford-Modulbündel vom Typ  $(\mathcal{E}, \gamma_-)$  angegeben (s. [Ack,Tol], [Tol]):

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^2 &= \Delta^{\hat{\nabla}} + \frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\gamma^{ij}[\omega_i, \omega_j] \\
&\quad + \frac{1}{4}g_{ij}\gamma^k[\omega_k, \gamma^i]\gamma^\ell[\omega_\ell, \gamma^j] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\gamma^k[\omega_k, \gamma^i], \omega_i] - \frac{1}{2}[\gamma^j(\nabla_i\omega_j), \gamma^i]. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Man beachte hier das andere Vorzeichen vor dem Term in der mittleren Zeile im Unterschied zu Lemma 2.2. Es ändert sich auch das Vorzeichen vor dem Zusammenhangs-Laplace-Operator aufgrund der veränderten Clifford-Relation. Darüber hinaus sei noch angemerkt, dass für den Fall, dass  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$  ein getwistetes Spinor-Bündel ist und  $F^{\mathcal{E}}$  die Krümmungsform zu einem Clifford-Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}} = \nabla^{\mathcal{S}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{W}} + \mathbf{1}_{\mathcal{S}} \otimes \nabla^{\mathcal{W}}$  ist, sich der Term  $\frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{E}}$  noch weiter zerlegen lässt (s. Anhang B.3):

$$\frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{E}} = -\frac{1}{4}R\mathbf{1}_{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{W}}, \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}\mathbf{1}_{\mathcal{E}}, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{4}R\mathbf{1}_{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\gamma^{ij}F_{ij}^{\mathcal{W}}, \quad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = -2g^{ij}\mathbf{1}_{\mathcal{E}}. \tag{2.12}$$

$R$  ist hier der Riemannsche Krümmungsskalar, und  $F_{ij}^{\mathcal{W}}$  sind die Komponenten der Krümmung zum Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{W}}$ . Auch hier zeigt sich ein Vorzeichenunterschied, der von der Wahl des Typs des Clifford-Modulbündels abhängt.

Aufgrund der Lichnerowicz-Zerlegung existiert eine weitere ausgezeichnete Klasse von Dirac-Operatoren (s. [Ack,Tol], [Tol2]):

**Definition 2.1.** Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator mit Lichnerowicz-Zerlegung

$$D^2 = \Delta^{\nabla} + \mathcal{V}. \tag{2.13}$$

$D$  heißt ein Dirac-Operator vom einfachen Typ, wenn  $\nabla$  ein Clifford-Zusammenhang ist.

Dirac-Operatoren vom einfachen Typ lassen sich durch folgende Eigenschaft charakterisieren (s. [Ack,Tol], [Tol2]):

**Lemma 2.3.** *Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator auf einem Clifford-Modulbündel, so gilt:*

*$D$  ist vom einfachen Typ genau dann, wenn:*

$$\exists \nabla \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E}), \quad \phi \in \Gamma(\text{End}_{Cl}^-(\mathcal{E})) \quad \text{und} \quad D = c_{\pm} \circ \nabla + \Gamma \otimes \phi. \quad (2.14)$$

Hierbei ist

$$\text{End}_{Cl}(\mathcal{E}) := \{A \in \text{End}(\mathcal{E}) \mid |[A, c_{\pm}(a)]| = 0, \forall a \in \mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M})\} \quad (2.15)$$

und  $\Gamma$  das kanonische Element der Clifford-Algebra.

Zum Beweis siehe [Ack,Tol], wobei  $\text{id} \hat{\otimes} \phi$  durch  $\Gamma \otimes \phi$  zu ersetzen ist (siehe auch [Tol2]).

Des Weiteren hat die Lichnerowicz-Zerlegung für Dirac-Operatoren vom einfachen Typ eine besonders einfache Form (s. [Ack,Tol], [Tol2]). Sei  $D$  ein Dirac-Operator vom einfachen Typ, so gilt:

$$D^2 = \Delta^{\nabla} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\nabla} + \gamma^i (\nabla_i^{\text{End}(\mathcal{E})} \Phi) + \Phi^2, \quad \nabla \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{E}). \quad (2.16)$$

Hier bezeichnen  $F_{ij}^{\nabla}$  die Komponenten der Krümmung zum Zusammenhang  $\nabla$ ,  $\nabla^{\text{End}(\mathcal{E})}$  den auf das Endomorphismenbündel fortgesetzten Zusammenhang und  $\Phi := \Gamma \otimes \phi$ .

Darüber hinaus sind Standard-Dirac-Operatoren auch Dirac-Operatoren vom einfachen Typ mit  $\phi = 0$ . Damit erhält man für die Lichnerowicz-Zerlegung:

$$D^2 = \Delta^{\nabla} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\nabla}. \quad (2.17)$$

# Kapitel 3

## Wirkungsfunktionale

Dieser Abschnitt behandelt die Grundlagen für Dirac-Modelle, wie sie in [Tol2] vorgestellt werden. Hierfür ist der geometrische Rahmen wesentlich, der durch Fermion-Bündel, Higgs-Bündel und Dirac-Yukawa-Operatoren beziehungsweise Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren gegeben ist. Ein weiterer wichtiger Punkt ist, die Konstruktion von Wirkungsfunktionalen aus verallgemeinerten Dirac-Operatoren. Dabei wird mit Hilfe eines verallgemeinerten Residuums eine Abbildung von einer Menge von Dirac-Operatoren auf eine Menge von Funktionalen konstruiert, so dass das Bild eines Dirac-Operators ein Funktional in den Eichpotentialen eines Zusammenhanges ist, der diesen Dirac-Operator definiert. Bei der Konstruktion von Dirac-Modellen zeigt sich, dass sich beim Auswerten der Wirkungsfunktionale bei bestimmten Termen Vorzeichenunterschiede auftreten, die vom Typ des gewählten Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_\pm(\mathcal{M})$  über der Basis-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  abhängen. Wir werden hier den Fall eines Clifford-Bündel vom Typ  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  betrachten. Der Fall für den Typ  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  wird in [Ack,Tol], [Tol], [Ack], [Tol2] untersucht. Des Weiteren bezeichne hier  $\gamma$  immer die Clifford-Aktion. Um die Notation übersichtlich zu halten wird hier stillschweigend das Ricci-Kalkül und die zugehörigen Regeln zum Heben und Senken von Indizes verwendet.

### 3.1 Dirac-Operatoren auf Fermion-Bündeln

Kommen wir zur Vorstellung des geometrischen Rahmens:

**Definition 3.1.** *Sei  $\mathcal{S}$  ein Spinor-Bündel über einer kompakten, randlosen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, g)$  gerader Dimension und  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel über  $\mathcal{M}$ . Sei ferner  $V_F = V_{F,L} \oplus V_{F,R}$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduierter, hermitescher Vektorraum und*

$$\rho_F = \rho_{F,L} \oplus \rho_{F,R} : G \rightarrow SU(V_F) \quad (3.1)$$

*eine bezüglich der  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung gerade Darstellung. Weiter seien*

$$E := E_L \oplus E_R := \mathcal{P} \times_{\rho_F} V_F \quad (3.2)$$

*das sich daraus ergebende assoziierte Vektorbündel und*

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_L \oplus \mathcal{E}_R := \mathcal{S} \otimes E \quad (3.3)$$

das damit erzeugte getwistete Spinor-Bündel, so heißt das Tripel  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel bzgl.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ . Weiter wird  $\mathcal{S}$  das Bündel der äußeren Freiheitsgrade und  $E$  das Bündel der inneren Freiheitsgrade genannt.

Wenn nun  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator ist, so heißt das Tripel  $(D, \rho_F, G)$  ein Dirac-Tripel.

Nach Konstruktion ist das Bündel  $E$   $\mathbb{Z}_2$ -graduiert mit  $E_{L,R} = \mathcal{P} \times_{\rho_F} V_{L,R}$ . Wenn  $\chi_E$  der zugehörige Graduierungs-Operator ist, so ist die totale  $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung auf dem Fermion-Bündel  $\mathcal{E}$  gegeben durch  $\chi_{\mathcal{E}} = \Gamma \otimes \chi_E$ , wobei das kanonische Element  $\Gamma$  der Graduierungs-Operator auf  $\mathcal{S}$  ist.

Zur physikalischen Interpretation sollte bemerkt werden, dass ein Fermion durch ein Fermion-Bündel repräsentiert wird und die Schnitte  $\psi \in \Gamma(\mathcal{E})$  die verschiedenen Zustände des Fermions darstellen ( diese Interpretation folgt der Sichtweise von J. Tolksdorf).

Um später das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung adäquat beschreiben zu können, müssen noch geometrische Objekte eingeführt werden, die das Higgs-Feld beschreiben. Wir folgen hierbei der Darstellung aus [Tol2].

**Definition 3.2.** Sei  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  ein  $G$ -Prinzipalbündel. Seien  $V_H$  ein hermitescher Vektorraum und  $\rho_H : G \rightarrow SU(V_H)$  eine Darstellung. Dann heißt das assoziierte Vektorbündel

$$E_H := \mathcal{P} \times_{\rho_H} V_H \quad (3.4)$$

das Higgs-Bündel bzgl.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ .

Weiter sei:

**Definition 3.3.** Sei  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel bzgl.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  und  $V_F = V_{F,L} \oplus V_{F,R}$  sei die typische Faser des Bündels der inneren Freiheitsgrade und  $E_H$  ein Higgs-Bündel bzgl.  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  mit typischer Faser  $V_H$ . So heißt eine bilineare Abbildung

$$G_Y : V_H \times V_{F,R} \longrightarrow V_{F,L} \quad (3.5)$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} G_Y(\rho_H(g)v_H, \rho_{F,R}(g)v_{F,R}) &= \rho_{F,L}(g)G_Y(v_H, v_{F,R}), \\ \forall g \in G, \quad \forall v_H \in V_H, \quad \forall v_{F,R} \in V_{F,R} \end{aligned} \quad (3.6)$$

eine Yukawa-Abbildung.

Mit Hilfe der Yukawa-Abbildung lässt sich eine Unterklasse von Dirac-Operatoren vom einfachen Typ definieren (s. [Tol2] Kap. 5.4. Def. 5.4.2.):

**Definition 3.4.** Seien  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel und  $E_H$  ein Higgs-Bündel (beide bzgl. eines Prinzipalbündels  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$ ). Ein kompatibler Dirac-Operator  $D_{Y,\phi} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  vom einfachen Typ:

$$D_{Y,\phi} = D + \Gamma \otimes \phi, \quad D \text{ ist SDO}, \quad (3.7)$$

heißt ein Dirac-Yukawa-Operator, wenn gilt:  $\phi \in \Gamma(\text{End}^-(E_F))$  mit

$$\phi = i \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\phi}_Y \\ \tilde{\phi}_Y^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi}_Y \in \Gamma(\text{Hom}(E_{F,R}, E_{F,L})), \quad (3.8)$$

und  $\phi_H \in C_{\text{äq}}^\infty(\mathcal{P}, V_H)$  mit

$$(\tilde{\phi}_Y \Psi_{F,R})(x) := [(p, G_Y(\phi_H(p), \psi_{F,R}(p)))]|_{p \in \pi^{-1}(x)} \quad (3.9)$$

wobei  $\Psi_{F,R}(x) = [(p, \psi_{F,R}(p))]|_{p \in \pi^{-1}(x)} \in E_{F,R}$ . Weiter ist  $\tilde{\phi}_Y^\dagger \in \Gamma(\text{Hom}(E_{F,L}, E_{F,R}))$  die hermitisch konjugierte Abbildung zu  $\tilde{\phi}_Y$  und  $G_Y$  eine Yukawa-Abbildung.

Aus der obigen Definition ergibt sich, dass der Dirac-Yukawa-Operator  $D_{Y,\phi}$  von der Wahl der Funktion  $\phi_H \in C_{\text{äq}}^\infty(\mathcal{P}, V_H)$  abhängt. Wegen  $\phi_H \in C_{\text{äq}}^\infty(\mathcal{P}, V_H) \cong \Gamma(E_H)$  (s. Lemma 1.2) hängt  $D_{Y,\phi}$  somit von der Wahl eines Schnittes in das Higgs-Bündel ab. Der Dirac-Yukawa-Operator spielt eine ausgezeichnete Rolle, da sich durch ihn die physikalisch bekannten Fermion-Wechselwirkungen beschreiben lassen. Des Weiteren induzieren Dirac-Yukawa-Operatoren eine 3-Parameter-Schar von so genannten verallgemeinerten Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren (s. [Tol], [Tol2] Kap. 5), die für die Konstruktion des Standardmodells der Elementarteilchenphysik als Dirac-Modell eine wichtige Rolle spielen.

Sei zunächst nach [Tol] bzw. [Tol2]:

**Definition 3.5.** Seien  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel und  $\chi_\mathcal{E}$  der zugehörige Graduierungs-Operator. Dann ist das verdoppelte Fermion-Bündel  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\rho}_F, G, \chi_{\tilde{\mathcal{E}}}, \mathcal{I}, \mathcal{J})$  zu  $(\mathcal{E}, G, \rho_F)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &:= \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}, \\ \tilde{\rho}_F &:= \rho_F \oplus \rho_F, \\ \chi_{\tilde{\mathcal{E}}} &:= \chi_\mathcal{E} \oplus (-\chi_\mathcal{E}), \\ \mathcal{I} &:= \mathbf{1}_S \otimes I := \mathbf{1}_S \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_E \\ \mathbf{1}_E & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{J} &:= \mathbf{1}_S \otimes J := \mathbf{1}_S \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{1}_E & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_E \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierzu sei angemerkt, dass  $\tilde{\mathcal{E}}$  wegen  $\mathcal{I}^2 = -\text{id}_{\tilde{\mathcal{E}}}$  eine komplexe Struktur besitzt und  $\mathcal{J}$  eine dazu gehörige reelle Struktur ist, da  $\mathcal{J} \circ \mathcal{I} = -\mathcal{I}$  gilt. Die Konjugation oder reelle Struktur  $\mathcal{J}$  zeichnet auf  $\tilde{\mathcal{E}}$  das *reelle Unterbündel*

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{reell}} := \{v \oplus w \in \tilde{\mathcal{E}} \mid v \oplus w = \mathcal{J}(v \oplus w)\} \quad (3.11)$$

aus. Für die Schnitte dieses Bündels ergibt sich dann:

$$\Gamma(\tilde{\mathcal{E}}_{\text{reell}}) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}) \mid \psi \in \Gamma(\mathcal{E}) \right\} \cong \Gamma(\mathcal{E}). \quad (3.12)$$

Da  $\tilde{\mathcal{E}}$  beziehungsweise  $\tilde{E} := E \oplus E$  ein komplexes Vektorbündel ist, lässt sich  $\tilde{\mathcal{E}}$  diagonalisieren, und man erhält  $I = \begin{pmatrix} i\mathbf{1}_E & 0 \\ 0 & -i\mathbf{1}_E \end{pmatrix}$  und  $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_E \\ \mathbf{1}_E & 0 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich eine Zerlegung von  $\tilde{\mathcal{E}}$ :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{S} \otimes (E \oplus E) \cong \mathcal{S} \otimes (E \oplus \bar{E}) \cong \mathcal{S} \otimes E \oplus \mathcal{S} \otimes \bar{E}, \quad (3.13)$$



wobei  $\bar{E}$  das konjugiert komplexe Bündel zu  $E$  ist. Hier erhält man als ausgezeichneten Unterraum von Schnitten:

$$\Gamma_{diag}(\tilde{\mathcal{E}}) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} \in \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}) \mid \psi \in \Gamma(\mathcal{E}) \right\} \cong \Gamma(\mathcal{E}). \quad (3.14)$$

Ausführliche Darstellungen zu komplexen Strukturen auf verdoppelten Fermion-Bündeln finden sich in [Tol2], [Tol3].

Sei  $\mathcal{E}$  nun ein Fermion-Bündel und  $D_{Y,\phi}$  ein Dirac-Yukawa-Operator auf  $\mathcal{E}$ , so induziert  $D_{Y,\phi}$  eine 3-Parameter-Schar von verallgemeinerten Dirac-Operatoren auf dem verdoppelten Bündel  $\tilde{\mathcal{E}}$  (s. [Tol] bzw. [Tol2]):

**Definition 3.6.** Seien  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\rho}_F, G, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \chi_{\tilde{\mathcal{E}}})$  ein verdoppeltes Fermion-Bündel und

$$D_{Y,\phi} = \gamma \circ \nabla^{\mathcal{E}} + \Phi, \quad \nabla^{\mathcal{E}} \in \mathcal{A}_{Cl}(\mathcal{M}) \quad (3.15)$$

ein Dirac-Yukawa-Operator auf  $\mathcal{E}$ , dem zugehörigen Fermion-Bündel, so ist der durch  $D_{Y,\phi}$  indizierte verallgemeinerte Pauli-Dirac-Yukawa-Operator definiert durch:

$$D_{PY} := D_{Y,\phi} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathcal{I}(a_2 \gamma(F^{\mathcal{E}/S}) + a_3 \gamma(\nabla^{\text{End}\mathcal{E}} \Phi) + a_0 \gamma(\Phi^2)) \quad (3.16)$$

$F^{\mathcal{E}/S}$  bezeichne hier die relative Krümmung, und  $\nabla^{\text{End}\mathcal{E}}$  ist der von  $\nabla^{\mathcal{E}}$  auf  $\text{End}(\mathcal{E})$  induzierte Zusammenhang. Ferner ist  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Betrachtet man nun einen Dirac-Yukawa-Operator  $D_{Y,\phi} = D + \Phi$  mit dem SDO  $D$  zum Clifford-Zusammenhang  $\nabla^{\mathcal{E}}$  und der Dirac-Form  $\omega_{Y,\phi} = \xi_1 \wedge \Phi = \xi_1 \wedge (\Gamma \otimes \phi)$  mit der kanonische 1-Form  $\xi_1$ , so gilt lokal

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{E}} &= d + \omega^{Spin} \otimes \mathbf{1}_E + A \otimes \mathbf{1}_E, \\ \omega^{Spin} &:= \frac{1}{4} dx^i \otimes \omega_{ijk} \gamma^{jk}, \quad A \in \Omega^1(U, \text{End}^+(\mathcal{E})), \quad U \subset \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei  $U$  offen ist, und  $d$  ist das äußere Differential. Um die Notation einfach zu halten, werden die Identitäten  $\mathbf{1}$ . und  $\otimes$  im Folgenden unterdrückt. Untersucht man nun die Nebendiagonalelemente  $\gamma(P)$  des von  $D_{Y,\phi}$  induzierten verallgemeinerten Pauli-Dirac-Yukawa-Operators  $D_{PY}$

$$\gamma(P) := \gamma(a_2 F^{\mathcal{E}/S}) + a_3 \gamma(\nabla^{\text{End}\mathcal{E}} \Phi) + \gamma(a_0 \Phi^2) \quad (3.18)$$

so sind die folgenden Parameter-Wahlen ausgezeichnet (s. [Tol], [Tol2]):

1.  $a_3 = a_0 = (1 - \frac{1}{2n})a_2$ ,  $2n = \dim \mathcal{M}$ , dann gilt:

$$\gamma(P) = a_2 \gamma\left(F_{\tilde{\nabla}}^{\mathcal{E}/S}\right). \quad (3.19)$$

$F_{\tilde{\nabla}}^{\mathcal{E}/S}$  ist die getwistete Krümmung zum Zusammenhang  $\tilde{\nabla} = \nabla^{\mathcal{E}} + \omega_{Y,\phi}$ . Die Quantisierung von  $\tilde{\nabla}$  liefert gerade den zugrunde liegenden Dirac-Yukawa-Operator  $D_{Y,\phi}$ . Diesen Fall wollen wir als *geometrischen Fall* bezeichnen.

2.  $a_2 = a_3 = a_0$ , dann ist

$$\gamma(P) = a_2 \gamma(\mathcal{R}^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}). \quad (3.20)$$

$\mathcal{R}^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}$  ist die getwistete Superkrümmung zum Superzusammenhang  $\mathbb{A} = \nabla^{\mathcal{E}} + \Phi$ , der quantisiert wieder  $D_{Y,\phi}$  ergibt. Dieser Fall heiße *supergeometrischer Fall*.

3.  $a_3 = a_0 =: a$ , dann ist

$$\gamma(P) = \gamma(a_2 F_{\nabla} + a(A \wedge \omega_{Y,\phi} + \omega_{Y,\phi} \wedge A) + a F_{\hat{\nabla}}) \quad (3.21)$$

mit den Krümmungen  $F_{\nabla^{\mathcal{E}}}$ ,  $F_{\hat{\nabla}}$  zu den Zusammenhängen  $\nabla$ ,  $\hat{\nabla}$  für die lokal gilt:  $\nabla = d + A$  und  $\hat{\nabla} = d + \omega_{Y,\phi}$ . Diesen Fall wollen wir als *Wechselwirkungsfall* bezeichnen.

Wenn man den Term

$$a_2 F_{\nabla} + a F_{\hat{\nabla}} + a(A \wedge \omega_{Y,\phi} + \omega_{Y,\phi} \wedge A)$$

betrachtet, so beschreiben die Krümmungsterme die Wechselwirkung in reinen Eichtheorien, die durch den Zusammenhang  $\nabla$  bzw.  $\hat{\nabla}$  bestimmt werden. Der Term  $A \wedge \omega_{Y,\phi} + \omega_{Y,\phi} \wedge A$  lässt sich als Wechselwirkungsterm zwischen den von  $\nabla$  und  $\hat{\nabla}$  erzeugten Eichwechselwirkungen interpretieren (s. hierzu [Tol2]). Es wird sich herausstellen, dass der Wechselwirkungsfall auf diesen ausgezeichneten Fällen der einzige Fall ist, der konsistent mit Quanten-Korrekturen ist.

## 3.2 Wirkungs-Funktionale & Dirac-Modelle

In diesem Abschnitt werden nun die Funktionale vorgestellt, die für die Konstruktion von Dirac-Modellen notwendig sind.

**Definition 3.7.** Sei  $E = \mathcal{P} \times_{\rho} V$  ein zum Prinzipalbündel  $\mathcal{P}(\mathcal{M}, G)$  assoziiertes Vektorbündel. Die Kommutante von  $G$  ist dann definiert als:

$$\mathcal{C}_{\rho}(G) := \{a \in \text{End}(V) \mid [\rho(g), a] = 0, \quad \forall g \in G\}. \quad (3.22)$$

Vor der Konstruktion der Funktionale, sollte noch auf die folgende Subtilität hingewiesen werden. Die hier verwendeten Ergebnisse aus der Literatur setzen Dirac-Operatoren voraus deren *Quadrat positiv* ist. Hiermit ist gemeint, dass für einen verallgemeinerten Dirac-Operator  $D$ , der auf den Schnitten in ein hermitesches Clifford-Modul-Bündel  $\mathcal{E}$  operiert gilt:  $(\psi, D^2 \psi) > 0, \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{E}), \psi \neq 0$ . Für  $<$  soll entsprechend vom *negativen Quadrat* gesprochen werden. Es stellt sich aber heraus, dass die Dirac-Operatoren, die mit Clifford-Bündeln von Typ  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  konstruiert wurden sind, negatives Quadrat besitzen. Dies bedingt, dass man in den Formel von  $D$  nach  $iD$  übergehen muss, wobei  $iD$  wieder ein positives Quadrat besitzt.

Berücksichtigt man dies, so kann man ein verallgemeinertes Residuum definieren (s. [Tol] Def. 6):

**Definition 3.8.** Seien  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel mit  $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$  und  $\mathcal{D}^-(\mathcal{E})$  die Menge der kompatiblen Dirac-Operatoren auf  $\mathcal{E}$ , deren Quadrat negativ ist, dann ist das verallgemeinerte Residuum auf  $\mathcal{D}^-(\mathcal{E})$  definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{res}_\zeta : \mathcal{D}^-(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ D &\mapsto \mathcal{W}\text{res}(\zeta(iD)^{-2n+2}), \quad 2n = \dim \mathcal{M} \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit  $\zeta = \mathbf{1}_{\mathcal{S}} \otimes z$ ,  $z \in \Gamma(\text{End}(\mathcal{W}))$ , und  $z(x) = [(p, \tilde{z})]$ ,  $\tilde{z} \in \mathcal{C}_{\rho_F}(G)$ . Ferner sei  $\zeta$  positiv, und es gelte  $[\zeta, D] = [\zeta, \chi_{\mathcal{E}}] = 0$ . Hierbei sei  $\chi_{\mathcal{E}}$  der Graduierungs-Operator und  $\mathcal{W}\text{res}$  das Wodzicki-Residuum (s. z.B. [Tol2]).

Zu dem hier verwendeten Wodzicki-Residuum lässt sich sagen, dass es dadurch ausgezeichnet ist, dass es bis auf eine multiplikative Konstante die einzige Spur auf der Algebra der klassischen Pseudodifferentialoperatoren  $\Psi DO(\mathcal{E})$  darstellt. Somit ist das Wodzicki-Residuum auch eine Spur auf der Unteralgebra  $\Theta$  von  $\Psi DO(\mathcal{E})$ , die von den Potenzen  $D^{(-2n+2)}$ ,  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  erzeugt wird. Allerdings ist die Spur auf dieser Unteralgebra nicht mehr eindeutig. So lässt sich zeigen, dass der Operator  $\mathcal{W}\text{res}(\zeta \cdot)$ ,  $\zeta$  sei wie in Definition 3.8 definiert, eine Spur bildet. (Eine Zusammenfassung über die Eigenschaften des Wodzicki-Residuums findet sich z.B. in [Tol2] Kap. 6.1) Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft des Wodzicki-Residuums ist, dass es für bestimmte Potenzen von verallgemeinerten Laplace-Operatoren durch den zweiten Seeley-DeWitt-Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung der Wärmespur dieses Operators gegeben ist. Hierfür existieren explizite Formeln, so dass man die folgende Beziehung erhält (s. z.B. [Gi], [Ka, Wa]):

Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator auf einem Clifford-Modulbündel und  $D^2$  positiv, so gilt:

$$\mathcal{W}\text{res}(D^{-2n+2}) = \frac{2}{\Gamma(n-1)} \int_{\mathcal{M}} \text{*tr}_{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{6} R - \mathcal{V} \right). \quad (3.24)$$

Hierbei ist  $\mathcal{V}$  das Potential der Lichnerowicz-Zerlegung von  $D$  und  $R$  der Riemannsche Krümmungsskalar von  $\mathcal{M}$  und  $\dim \mathcal{M} = 2n$ .

Allerdings ist es in dem hier vorliegenden Fall bei Clifford-Modulbündeln zum Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  so, dass die Quadrate von verallgemeinerten Dirac-Operatoren nicht positiv, sondern negativ sind. Aber der Operator  $iD$  besitzt ein positives Quadrat. Damit erhält man für Clifford-Modulbündel zum Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$ :

Sei  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  mit  $D^2$  negativ, dann gilt:

$$\mathcal{W}\text{res}((iD)^{-2n+2}) = \frac{2}{\Gamma(n-1)} \int_{\mathcal{M}} \text{*tr}_{\mathcal{E}} \left( \frac{1}{6} R + \mathcal{V} \right). \quad (3.25)$$

Das Vorzeichen vor dem Potentialterm lässt sich verstehen, wenn man die Lichnerowicz-Zerlegung von  $iD$  betrachtet. Da für  $D$  gilt:  $D^2 = \Delta^{\hat{\nabla}} + \mathcal{V}$ , folgt:

$$(iD)^2 = - \left( \Delta^{\hat{\nabla}} + \mathcal{V} \right) = -\Delta^{\hat{\nabla}} - \mathcal{V}. \quad (3.26)$$

Mit dieser Vorbemerkung erhält man folgendes wichtiges Lemma zu  $\text{res}_\zeta$ :

**Lemma 3.1.** Seien  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel und  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein kompatibler Dirac-Operator, wobei  $D^2$  negativ ist, so gilt:

$$\text{res}_\zeta(D) = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_{\mathcal{M}} \text{*tr}_{\mathcal{E}} \left( \zeta \left( \frac{1}{6} R + \mathcal{V} \right) \right), \quad (3.27)$$

und das Spektrum von  $\zeta^\alpha$  ist konstant  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [Tol], nur dass dort  $D$  durch  $iD$  zu ersetzen ist.  $\square$

Damit lassen sich nun Dirac-Modelle definieren (s. [Tol2]):

**Definition 3.9.** Sei  $(D, G, \rho)$  ein Dirac-Tripel zu einem Fermion-Bündel  $\mathcal{E}$ . So ist die bosonische Wirkung definiert durch:

$$\mathcal{I}_B := \text{res}_\zeta(D), \quad (3.28)$$

und die fermionische Wirkung ist gegeben durch:

$$\mathcal{I}_F := (\psi, iD\psi)_{\Gamma(\mathcal{E})}. \quad (3.29)$$

$(\cdot, \cdot)_{\Gamma(\mathcal{E})}$  sei die von der hermiteschen Struktur auf  $\mathcal{E}$  induzierte hermitesche Struktur auf  $\Gamma(\mathcal{E})$ . Die totale Wirkung ist dann:

$$\mathcal{I}_T := \mathcal{I}_F + \mathcal{I}_B \quad (3.30)$$

und  $((D, G, \rho), \mathcal{I}_T)$  heißt Dirac-Modell.

Dies führt zu der folgenden Unterklasse von Dirac-Modelle:

**Definition 3.10.** Seien  $(\mathcal{E}, \rho_F, G)$  ein Fermion-Bündel und  $D_{Y,\phi} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  ein Dirac-Yukawa-Operator. Dann ist ein Dirac-Einstein-Hilbert-Yang-Mills-Higgs-Modell (DEHYMH-Modell) definiert durch  $((D_{PY}, \tilde{\rho}_F, G), \tilde{\mathcal{I}}_T)$  mit einem verallgemeinerten Pauli-Dirac-Yukawa-Operator  $D_{PY}$  zu  $D_{Y,\phi}$  und der modifizierten totalen Wirkung

$$\tilde{\mathcal{I}}_T = \tilde{\mathcal{I}}_F + \mathcal{I}_B, \quad \tilde{\mathcal{I}}_F := \mathcal{I}_T|_{\Gamma_{\text{reell}}(\tilde{\mathcal{E}})}. \quad (3.31)$$

Aus dieser Definition folgt für die fermionische Wirkung eines DEHYMH-Modells:

$$\tilde{\mathcal{I}}_F = (\tilde{\psi}, iD_{PY}\tilde{\psi})_{\Gamma(\tilde{\mathcal{E}})} = (\psi, iD_{Y,\phi}\psi)_{\Gamma(\mathcal{E})}, \quad \tilde{\psi} \in \Gamma_{\text{reell}}(\tilde{\mathcal{E}}), \quad (3.32)$$

wobei  $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $D_{Y,\phi}$  ist der induzierende Dirac-Yukawa-Operator zu  $D_{PY}$  (s. [Tol2]).

Für die bosonische Wirkung eines DEHYMH-Modells gilt das folgende Lemma:

**Lemma 3.2.** Sei  $((D_{PY}, \tilde{\rho}, G), \tilde{\mathcal{I}}_T)$  ein DEHYMH-Modell so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{res}_\zeta(D_{PY}) &= -\frac{1}{6\Gamma(n-1)} \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z') \int_{\mathcal{M}} * (R \\ &\quad - \alpha'_0 \text{tr}_E(z' \phi^4) \\ &\quad + \alpha'_2 \text{tr}_E(z' F_{ij}^E F^{Eij}) \\ &\quad + \alpha'_3 \text{tr}_E(z' [\nabla_i^E, \phi] [\nabla^{Ei}, \phi]) \\ &\quad - \alpha'_4 \text{tr}_E(z' \phi^2) ), \end{aligned} \quad (3.33)$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha'_0 &= 12 \frac{(2n-1)}{\text{tr}_E(z')} a_0^2, \\
\alpha'_2 &= 6 \frac{(2n-3)}{\text{tr}_E(z')} a_2^2, \\
\alpha'_3 &= 24 \frac{(n-1)}{\text{tr}_E(z')} a_3^2, \\
\alpha'_4 &= 12 \frac{1}{\text{tr}_E(z')}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Dabei ist  $2n = \dim(\mathcal{M})$ , weiter sind  $R$  der Riemannsche Krümmungsskalar und  $z' = z_1 + z_2$ , wobei  $\tilde{\zeta} = \mathbf{1}_S \otimes \tilde{z}$  und  $\tilde{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$  sind. Ferner bezieht sich diese Aussage auf Fermion-Bündel mit Clifford-Strukturen, die von dem Algebren-Bündel  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  induziert werden.

**Beweis:** Das Vorgehen ist hier analog zu [Tol], wo der Fall für das Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  behandelt wurde. Zunächst gilt nach Gleichung (3.27):

$$\text{res}_{\tilde{\zeta}}(D_{PY}) = \frac{2}{\Gamma(n-1)} \int_{\mathcal{M}} * \text{tr}_{\tilde{\varepsilon}} \left( \tilde{\zeta} \left( \frac{1}{6} R + \mathcal{V} \right) \right).$$

$\mathcal{V}$  ist dabei nach Lemma 2.2 und Gleichung (2.11):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= -\frac{1}{4} R + \frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\tilde{E}} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} [\omega_i, \omega_j] \\
&\quad - \frac{1}{2} [\gamma^j (\nabla_i \omega_j), \gamma^i] + \frac{1}{2} [\gamma^i [\omega_i, \gamma^j], \omega_j] \\
&\quad - \frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^j].
\end{aligned}$$

Unter der Spur  $\text{tr}_{\tilde{\varepsilon}}$  verschwinden aber die Kommutatorterme und  $\frac{1}{2} \gamma^{ij} F_{ij}^{\tilde{E}}$ , so dass nur die Terme  $-\frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^j]$  und  $\frac{1}{2} \gamma^{ij} [\omega_i, \omega_j]$  zu berechnen sind.  $\omega$  lässt sich nun zerlegen in:

$$\omega = \omega^0 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$$

mit:

$$\begin{aligned}
\omega^0 &= \frac{a_0}{2n} g_{ij} dx^i \otimes \gamma^j \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\phi^2 \\ \phi^2 & 0 \end{pmatrix}, \\
\omega^2 &= \frac{a_2}{2} dx^i \otimes \gamma^j \otimes \begin{pmatrix} 0 & -F_{ij}^E \\ F_{ij}^E & 0 \end{pmatrix}, \\
\omega^3 &= a_3 dx^i \otimes \Gamma \otimes \begin{pmatrix} 0 & -[\nabla_i^E, \phi] \\ [\nabla_i^E, \phi] & 0 \end{pmatrix}, \\
\omega^4 &= \frac{a_4}{2n} g_{ij} dx^i \otimes \gamma^j \Gamma \otimes \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach dem Lemma A.1 tragen in den nicht verschwindenden Ausdrücken nur die Terme bei, in denen in beiden Faktoren die Terme  $\omega^i$  den gleichen Index

besitzen. Sei nun:

$$\begin{aligned} [ , ] [ , ]^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta} \frac{1}{4} g_{rs} \gamma^k [\omega_k^i, \gamma^r] \gamma^\ell [\omega_\ell^i, \gamma^s] \right) \\ [ , ]^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta} \frac{1}{2} \gamma^{rs} [\omega_r^i, \omega_s^i] \right). \end{aligned}$$

Für die Kommutante  $\tilde{\zeta}$  lässt sich allgemein ansetzen:

$$\tilde{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_a \\ \zeta_b & \zeta_2 \end{pmatrix}$$

mit  $\zeta_i = \mathbf{1}_S \otimes z_i$ ,  $i = 1, 2, a, b$ . Dann seien:

$$\tilde{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \zeta_a \\ \zeta_b & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{\zeta}_d + \tilde{\zeta}_a$$

und

$$\begin{aligned} [ , ] [ , ]_d^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta}_d \frac{1}{4} g_{rs} \gamma^k [\omega_k^i, \gamma^r] \gamma^\ell [\omega_\ell^i, \gamma^s] \right), \\ [ , ] [ , ]_a^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta}_a \frac{1}{4} g_{rs} \gamma^k [\omega_k^i, \gamma^r] \gamma^\ell [\omega_\ell^i, \gamma^s] \right), \\ [ , ]_d^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta}_d \frac{1}{2} \gamma^{rs} [\omega_r^i, \omega_s^i] \right), \\ [ , ]_a^i &:= \text{tr}_{\tilde{\mathcal{E}}} \left( \tilde{\zeta}_a \frac{1}{2} \gamma^{rs} [\omega_r^i, \omega_s^i] \right). \end{aligned}$$

Es zeigt sich nun, dass die Terme  $[ , ] [ , ]_a^i$  und  $[ , ]_a^i$  verschwinden, wie man durch Einsetzen der Ausdrücke für  $\omega^i$  und nach kurzer Rechnung sieht:

$$\begin{aligned} [ , ] [ , ]_a^0 &= \frac{a_0^2}{16} g_{rs} g_{ki} g_{\ell m} \text{tr}_S (\gamma^k [\gamma^i, \gamma^r] \gamma^\ell [\gamma^m, \gamma^s]) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a \phi^2 \\ z_b \phi^2 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ [ , ] [ , ]_a^2 &= \frac{a_2^2}{16} g_{rs} \text{tr}_S (\gamma^k [\gamma^j, \gamma^r] \gamma^\ell [\gamma^m, \gamma^s]) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & F_{kj}^E F_{\ell m}^E \\ F_{kj}^E F_{\ell m}^E & 0 \end{pmatrix} \right), \\ [ , ] [ , ]_a^3 &= \frac{a_3^2}{4} g_{rs} \text{tr}_S (\gamma^k [\Gamma, \gamma^s] \gamma^\ell [\Gamma, \gamma^r]) \cdot \\ &\quad (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a [\nabla_k^E, \phi] [\nabla_\ell^E, \phi] \\ z_b [\nabla_k^E, \phi] [\nabla_\ell^E, \phi] & 0 \end{pmatrix} \right), \\ [ , ] [ , ]_a^4 &= \frac{a_4^2}{16n^2} g_{rs} g_{kj} g_{\ell m} \text{tr}_S (\gamma^k [\gamma^j \Gamma, \gamma^r] \gamma^\ell [\gamma^m \Gamma, \gamma^s]) \cdot \\ &\quad (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a \phi^2 \\ z_b \phi^2 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

und weiter:

$$\begin{aligned}
[\cdot, \cdot]_a^0 &= \frac{a_0^2}{8} g_{rj} g_{sm} \text{tr}_S(\gamma^{rs} \gamma^{jm}) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a \phi^4 \\ z_b \phi^4 & 0 \end{pmatrix} \right), \\
[\cdot, \cdot]_a^2 &= \frac{a_2^2}{8} \text{tr}_S(\gamma^{rs} [\gamma^j, \gamma^m]) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a F_{rj}^E F_{sm}^E \\ z_b F_{rj}^E F_{sm}^E & 0 \end{pmatrix} \right), \\
[\cdot, \cdot]_a^3 &= \frac{a_3^2}{2} \text{tr}_S(\gamma^{rs}) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a [\nabla_r^E, \phi] [\nabla_s^E, \phi] \\ z_b [\nabla_r^E, \phi] [\nabla_s^E, \phi] & 0 \end{pmatrix} \right), \\
[\cdot, \cdot]_a^4 &= \frac{a_4^2}{8} g_{rj} g_{sm} \text{tr}_S(\gamma^{rs} [\gamma^j, \gamma^m]) (-1) \text{tr}_{\tilde{E}} \left( \begin{pmatrix} 0 & z_a \phi^2 \\ z_b \phi^2 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Da die Matrizen auf  $\tilde{E}$  verschwindende Diagonalelemente haben, sind alle diese Terme Null. Also gilt:  $[\cdot, \cdot]_a^i = [\cdot, \cdot]_d^i$  und  $[\cdot, \cdot]^i = [\cdot, \cdot]_d^i$ . Nutzt man dies aus, so ergibt sich nach expliziter Rechnung:

$$\begin{aligned}
[\cdot, \cdot]_d^0 &= -4n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 a_0^2 \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' \phi^4), \\
[\cdot, \cdot]_d^2 &= \frac{a_2^2}{2} (4n - 5) \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' F_{ij}^E F^{Eij}), \\
[\cdot, \cdot]_d^3 &= 4(n - 1) a_3^2 \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' [\nabla_i^E, \phi] [\nabla^{Ei}, \phi]), \\
[\cdot, \cdot]_d^4 &= -\frac{a_4^2}{n} \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' \phi^2),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[\cdot, \cdot]^0 &= 2a_0^2 \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' \phi^4) \\
[\cdot, \cdot]^2 &= \frac{a_2^2}{2} \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' F_{ij}^E F^{Eij}) \\
[\cdot, \cdot]^3 &= 0 \\
[\cdot, \cdot]^4 &= 2a_4^2 \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z' \phi^2).
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke wieder in die Formel für  $\text{res}_\zeta((i\tilde{D})^{-2n+2})$  ein, so erhält man das behauptete Ergebnis.  $\square$

Für den Fall des Algebren-Bündels  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  erhält man:

**Theorem 3.1.** *Seien die Voraussetzungen so gewählt wie in Lemma 3.2, nur dass die Clifford Aktion vom Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  induziert wird. Dann gilt für die bosonische Wirkung:*

$$\begin{aligned}
\text{res}_\zeta(D_{PY}^{-2n+2}) &= -\frac{1}{6\Gamma(n-1)} \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z') \int_{\mathcal{M}} *(R \\
&\quad + a_0' \text{tr}_E(z' \phi^4) \\
&\quad - a_2' \text{tr}_E(z' F_{ij}^E F^{Eij}) \\
&\quad + a_3' \text{tr}_E(z' [\nabla_i^E, \phi] [\nabla^{Ei}, \phi]) \\
&\quad + a_4' \text{tr}_E(z' \phi^2)), \tag{3.35}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
a'_0 &= \frac{12(2n-1)}{\text{tr}_E(z')} a_0^2, \\
a'_2 &= \frac{6(2n-3)}{\text{tr}_E(z')} a_2^2, \\
a'_3 &= \frac{24(n-1)}{\text{tr}_E(z')} a_3^2, \\
a'_4 &= \frac{12}{\text{tr}_E(z')} a_4^2.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dieses Theorem wird in einer leichten Verallgemeinerung in [Tol] bewiesen. Vergleicht man die Ergebnisse aus Lemma 3.2 und Theorem 3.1, stellt sich heraus, dass sich die Vorzeichen vor den Koeffizienten  $\alpha'_0, \alpha'_2$  und  $\alpha'_4$  geändert haben, während dagegen sich die Vorzeichen vor dem Koeffizienten  $\alpha'_3$  und dem Krümmungsskalar unverändert geblieben sind. Die Umkehrung der Vorzeichen vor den Koeffizienten  $\alpha'_0, \alpha'_2$  und  $\alpha'_4$  rührt vom Wechsel des Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  zum Clifford-Bündel  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  her, da sich das Vorzeichen vor dem Potentialterm  $\mathcal{V}$  im verallgemeinerten Residuum  $\text{res}_\zeta(\cdot)$  umdreht (s. Gl. (3.24), (3.25)). Dagegen ist der Grund für das Konstantbleiben des Vorzeichens vor dem Koeffizienten  $\alpha'_3$  in dem Vorzeichenwechsel in der Lichnerowicz-Zerlegung (s. Lemma 2.2) und der veränderten Clifford-Relation zu suchen.

Um die obigen Funktionale physikalisch zu interpretieren, führt man vor dem Riemannschen Krümmungsskalar die konventionelle Normierung  $\frac{1}{16\pi\ell_p^2}$  ( $\ell_p$  bezeichnet die Planck Länge) ein. Des Weiteren fordert man, dass die Riemannschen Normalkoordinaten der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  die Dimension einer Länge besitzen und dass die Funktionale dimensionslos sind. Mit diesen Konventionen erhält man für das bosonische Funktional im Fall eines DEHYMH-Modells für den Fall des Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_B &= \frac{1}{16\pi\ell_p^2} \int_{\mathcal{M}} *R \\
&+ \int_{\mathcal{M}} *(-\alpha_0 \text{tr}_E(z\phi^4) + \alpha_2 \text{tr}_E(zF_{ij}^E F^{Eij}) \\
&+ \alpha_3 \text{tr}_E(z[\nabla_i^E, \phi][\nabla^{Ei}, \phi]) - \alpha_4 \text{tr}_E(z\phi^2))
\end{aligned} \tag{3.37}$$

und im Fall des Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_b &= \frac{1}{16\pi\ell_p^2} \int_{\mathcal{M}} *R \\
&+ \int_{\mathcal{M}} *(+\alpha_0 \text{tr}_E(z\phi^4) - \alpha_2 \text{tr}_E(zF_{ij}^E F^{Eij}) \\
&+ \alpha_3 \text{tr}_E(z[\nabla_i^E, \phi][\nabla^{Ei}, \phi]) + \alpha_4 \text{tr}_E(z\phi^2)).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

In beiden Fällen sind die Koeffizienten:



$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{3(2n-1)}{4\pi\text{tr}_E(z')} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_0^2, \\
\alpha_2 &= \frac{3(2n-3)}{8\pi\text{tr}_E(z')} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_2^2, \\
\alpha_3 &= \frac{3(n-1)}{2\pi\text{tr}_E(z')} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_3^2, \\
\alpha_4 &= \frac{3}{4\pi\text{tr}_E(z')} \frac{1}{\ell_p^2}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Die Längenskala  $\ell$  entsteht dadurch, dass die Koordinaten der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  eine Längendimension bekommen, die durch  $\ell$  skaliert wird. Setzt man den Riemannschen Krümmungsskalar 0, so lassen sich die beiden Modelle durch die Substitution  $a_3 \rightarrow ia_3$  und durch einen globalen Vorzeichenwechsel ineinander überführen.

Wenn man den Term mit dem Riemannschen Krümmungsskalar außer acht lässt, so unterscheiden sich die beiden Fälle im Wesentlichen durch ein relatives Vorzeichen vor dem Term mit dem Koeffizienten  $\alpha_3$ . Im Folgenden Abschnitt wird sich herausstellen, dass gerade dieser Vorzeichenwechsel im Falle des Clifford-Bündels  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$  das Problem des Vorzeichens vor dem so genannten kinetischen Term des Higgs-Feldes löst, da sich für das Algebra-Bündel  $\mathcal{C}_-(\mathcal{M})$  hier ein mit den Konventionen der Physik nicht übereinstimmendes Vorzeichen ergibt (s. [Tol]).

## Kapitel 4

# Das Standardmodell als Dirac-Modell

In diesem Kapitel wird vorgestellt, wie sich das Standardmodell der Elementarteilchenphysik als ein DEHYMH-Modell beschreiben läßt. Es werden dabei das Standardmodell für die Fälle ohne (SM) und mit rechtshändigen (R- $\nu$ -SM) Neutrinos diskutiert, wobei der letztere Fall die Konstruktion von Modellen mit massiven Neutrinos zuläßt. Dabei beschränkt sich die Diskussion auf den Fall von Clifford-Modulbündeln zu Clifford-Bündeln vom Typ  $\mathcal{C}_+(\mathcal{M})$ .

Es werden die Dirac-Tripel von beiden Modellen angegeben und die bosonischen Wirkungen bestimmt. Des Weiteren werden die Ergebnisse mit dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik verglichen, wobei dieses hier in der Modifikation als ein Einstein-Hilbert-Yang-Mills-Higgs-Modell (EHYMH-Modell) betrachtet wird (s. [Tol], [Tol2]). Darüberhinaus werden die Parameterbeziehungen zwischen den physikalischen Kopplungen und den Modellparametern bestimmt. Des Weiteren wird in diesem Abschnitt, um die Notation übersichtlich zu halten, das Ricci-Kalkül verwendet.

Nach Definition 3.10 ist ein DEHYMH-Modell durch die Angabe eines Dirac-Tripels  $(D_{Y,\phi}, G, \rho_F)$  und eines dazu passendes Higgs-Bündel bestimmt, wobei letzteres durch das Angeben einer Darstellung  $\rho_H : G \rightarrow V_H$  von  $G$  festgelegt ist (s. Def. 3.2).

**Definition 4.1.** *Das Dirac-Tripel des Standardmodells  $(D_{Y,\phi}, G, \rho_F)$  ist gegeben durch:*

- $D_{Y,\phi} := D + \Gamma \otimes \phi$  wobei  $D$  ein SDO ist und die Komponenten  $\tilde{\phi}$  von  $\phi$  (s. Definition 3.4) gegeben sind durch (s.a. [Tol], [Tol2]):

$$\tilde{\phi} := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} g_y^{d'} \varphi_1 & g_y^u \bar{\varphi}_2 \\ g_y^{d'} \varphi_2 & -g_y^u \bar{\varphi}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ & (g_y^\ell \varphi_1, g_y^\ell \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

•

$$G := SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (4.2)$$

•

$$\rho_F := \rho_L \oplus \rho_R : G \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad V := V_L \oplus V_R \quad (4.3)$$

$$\rho_{F,L}(c, w, \theta) := \begin{pmatrix} c \otimes \mathbf{1}_N \otimes w e^{iy_L^q \theta} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes w e^{iy_L^\ell \theta} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\rho_{F,R}(c, w, \theta) := \begin{pmatrix} c \otimes \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{iy_R^{d'} \theta} & 0 \\ 0 & e^{iy_R^u \theta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N e^{iy_R^\ell \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Hierbei sind  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $y_L^q, y_L^\ell, y_R^{d'}, y_R^u, y_R^\ell \in \mathbb{Q}$  die so genannten Hyperladungen,  $\varphi$  ein Schnitt in das zugehörige Higgs-Bündel und  $\bar{\varphi}$  der zugehörige komplex konjugierte Schnitt.  $g_y^{d'}, g_y^u, g_y^\ell \in M_N(\mathbb{C})$  sind die Yukawa-Kopplungs-Matrizen, wobei  $g_y^u$  und  $g_y^\ell$  diagonal und reell sind (s. [Tol]).

Der Darstellungsraum  $V$  von  $\rho_F$  ist gegeben durch:

$$V \cong [(\mathbb{C}_q^{6N} \oplus \mathbb{C}_\ell^{2N})]_L \oplus [(\mathbb{C}^{3N} \oplus \mathbb{C}^{3N})_q \oplus \mathbb{C}_\ell^N]_R.$$

Das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos ist durch folgende Daten gegeben:

**Definition 4.2.** Das Dirac-Tripel  $(D_{Y,\phi}, G, \rho)$  des Standardmodells mit rechtshändigen Neutrinos ist gegeben durch:

- $D_{Y,\phi} := D + \Gamma \otimes \phi$ , wobei  $D$  ein SDO ist und die Komponenten  $\tilde{\phi}$  von  $\phi$  (s. Definition 3.4) gegeben sind durch:

$$\tilde{\phi} := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} g_y^{d'} \varphi_1 & g_y^u \bar{\varphi}_2 \\ g_y^{d'} \varphi_2 & -g_y^u \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} g_y^{\ell'} \varphi_1 & g_y^\ell \bar{\varphi}_2 \\ g_y^{\ell'} \varphi_2 & -g_y^\ell \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

•

$$G := SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (4.7)$$

•

$$\begin{aligned} \rho_F &:= \rho_L \oplus \rho_R : G \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad V := V_L \oplus V_R \\ \rho_{F,L}(c, w, \theta) &:= \begin{pmatrix} c \otimes \mathbf{1}_N \otimes w e^{iy_L^q \theta} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes w e^{iy_L^\ell \theta} \end{pmatrix} \\ \rho_{F,R}(c, w, \theta) &:= \begin{pmatrix} c \otimes \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{iy_R^{d'} \theta} & 0 \\ 0 & e^{iy_R^u \theta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{iy_R^e \theta} & 0 \\ 0 & e^{iy_R^\nu \theta} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit  $\theta \in [0, 2\pi)$ , den Hyperladungen  $y_L^q, y_L^\ell, y_R^{d'}, y_R^u, y_R^e, y_R^\nu \in \mathbb{Q}$ ,  $\varphi$  bezeichnet wieder einen Schnitt in das zugehörige Higgs-Bündel und  $\bar{\varphi}$  den komplex kongungierten Schnitt. Die Yukawa-Kopplungs-Matrizen sind  $g_y^{d'}, g_y^u, g_y^{\ell'}, g_y^\ell \in M_N(\mathbb{C})$ .

Der Darstellungsraum ist hier gegeben durch:

$$V \cong [(\mathbb{C}_q^{6N} \oplus \mathbb{C}_\ell^{2N})]_L \oplus [(\mathbb{C}^{3N} \oplus \mathbb{C}^{3N})_q] \oplus [(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)_\ell]_R.$$

Analog wie im Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos lässt sich durch bi-unitäre Transformationen erreichen, dass die Matrizen  $g_y^u$  und  $g_y^\ell$  diagonal und reell gewählt werden können, wogegen  $g_y^{d'}$  und  $g_y^{\ell'}$  im Allgemeinen komplexe Matrizen bleiben. Beim Auffinden der Transformationen für die Matrizen  $g_y^u$  und  $g_y^\ell$  im Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos geht man genauso vor wie bei der Konstruktion der Transformation für  $g_y^u$  im Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos. Details der Konstruktion der letztgenannten Transformation finden sich z.B. in [Na].

Das Higgs-Bündel  $E_h : \mathcal{P} \times_{\rho_h} V_h$  ist in beiden Fällen gegeben durch die Darstellung:

$$\begin{aligned} \rho_h : G = SU(3) \times SU(2) \times U(1) &\longrightarrow \text{End}(V_h), & V_h = \mathbb{C}^2 \\ (c, w, \theta) &\longmapsto w e^{iy_h \theta}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit  $\theta \in [0, 2\pi)$  und der Hyperladung  $y_h \in \mathbb{Q}$ .

Damit die Bedingungen aus Definition 3.3 für die durch die Gleichungen (4.1), (4.6) definierte Yukawa-Abbildung erfüllt sind, müssen für das Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos zwischen den Hyperladungen die folgenden Beziehungen gelten (s. [Tol]):

$$\begin{aligned} y_h &= y_L^\ell - y_R^\ell, \\ &= y_L^q - y_R^{d'}, \\ &= y_R^u - y_L^q. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos gilt eine entsprechende Aussage:

**Lemma 4.1.** *Im Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos (s. Definition 4.2) sind die Darstellungen  $\rho_{F,L}$ ,  $\rho_{F,R}$  und die Darstellung des Higgs-Bündels  $\rho_h$  aus Gleichung (4.9) nur dann verträglich mit der Definition der Yukawa-Abbildung (Def. 3.3), wenn gilt:*

$$\begin{aligned} y_h &= y_L^q - y_R^{d'}, \\ &= y_R^u - y_L^q, \\ &= y_L^\ell - y_R^e, \\ &= y_R^\nu - y_L^\ell. \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Beweis:** Nach Definition 3.3 muss gelten:

$$\begin{aligned}
\rho_{F,L}(c, w, \theta)\tilde{\phi} &= \tilde{\phi}'\rho_{F,R}(c, w, \theta) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} g_y^{d'}\varphi'_1 & g_y^u\bar{\varphi}'_2 \\ g_y^{d'}\varphi'_2 & -g_y^u\bar{\varphi}'_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} g_y^{\ell'}\varphi'_1 & g_y^\ell\bar{\varphi}'_2 \\ g_y^{\ell'}\varphi'_1 & -g_y^\ell\bar{\varphi}'_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \rho_{F,R}(c, w, \theta), \\
\varphi' &= (\varphi'_1, \varphi'_2) := \rho_h(c, w, \theta)\varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \\
(c, w, \theta) &\in SU(3) \times SU(2) \times U(1).
\end{aligned}$$

Also muss die obige Gleichung insbesondere für  $(\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_2, \theta) \in SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  gelten. Dann ist  $\varphi' = (e^{iy_h\theta}\varphi_1, e^{iy_h\theta}\varphi_2) = e^{iy_h\theta}\varphi$ . Für die rechte Seite der obigen Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} g_y^{d'}\varphi_1 e^{iy_h\theta} & g_y^u\bar{\varphi}_2 e^{-iy_h\theta} \\ g_y^{d'}\varphi_2 e^{iy_h\theta} & -g_y^u\bar{\varphi}_1 e^{-iy_h\theta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} g_y^{\ell'}\varphi_1 e^{iy_h\theta} & g_y^\ell\bar{\varphi}_2 e^{-iy_h\theta} \\ g_y^{\ell'}\varphi_2 e^{iy_h\theta} & -g_y^\ell\bar{\varphi}_1 e^{-iy_h\theta} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \\
&\begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{1}_N e^{iy_R^d\theta} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N e^{iy_R^u\theta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \begin{pmatrix} e^{iy_R^{\bar{c}}\theta} & 0 \\ 0 & e^{iy_R^v\theta} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{\phi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{i(y_h+y_R^d)\theta} & 0 \\ 0 & e^{i(-y_h+y_R^u)\theta} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{i(y_h+y_R^{\bar{c}})\theta} & 0 \\ 0 & e^{i(-y_h+y_R^v)\theta} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot$$

Auf der linken Seite ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\rho_{L,R}(\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_2, \theta)\tilde{\phi} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_N \otimes e^{iy_L^q\theta}\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes e^{iy_L^\ell\theta} \end{pmatrix} \tilde{\phi} \\
&= \tilde{\phi} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_N \otimes e^{iy_L^q\theta}\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_N \otimes e^{iy_L^\ell\theta} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da Gleichheit für alle  $\theta \in [0, 2\pi)$  gelten muss, folgt die Behauptung.  $\square$

Um den eingangs erwähnten Vergleich der Parameter vornehmen zu können, wird nun das Standardmodell für eine euklidische Raumzeit angegeben. Wir geben es hier als ein Einstein-Hilbert-Yang-Mills-Higgs-Modell an, bei dem noch ein Term mit einem Riemannschen Krümmungsskalar auftaucht, der nicht zum Standardmodell der Elementarteilchenphysik gehört. Für weitere Details sei auf [Tol] und [Tol2] verwiesen. Das Modell ist durch die folgenden Wirkungen gegeben:

$$\mathcal{I}_{DY} = \int_{\mathcal{M}} *(\psi, i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi) \varepsilon + \int_{\mathcal{M}} *(\psi, i\Phi\psi) \varepsilon, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{EHYMH} &= \frac{1}{16\pi\ell_p^2} \int_{\mathcal{M}} *R \\ &- \int_{\mathcal{M}} * \left( \frac{1}{2g_3^2} \text{tr}(C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}) + \frac{1}{2g_2^2} \text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) + \frac{1}{4g_1^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} *(\nabla_\mu \varphi)^*(\nabla^\mu \varphi) \\ &+ \int_{\mathcal{M}} *[\lambda(\varphi^* \varphi)^2 - \mu^2 \varphi^* \varphi]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Hierbei gilt lokal:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &:= \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu + [C_\mu, C_\nu], \\ W_{\mu\nu} &:= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu], \\ B_{\mu\nu} &:= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$C_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$  und  $B_{\mu\nu}$  bezeichnen hier rein imaginäre  $su(3)$ ,  $su(2)$  und  $u(1)$ -wertige Komponenten von Yang-Mills Krümmungen bezüglich der fundamentalen Darstellung.

Weiter sei:

$$\nabla_\mu \varphi := \left( \partial_\mu + W_\mu^b \frac{\tau_b}{2} + y_h B_\mu \right) \varphi \quad (4.15)$$

$$\nabla_\mu \psi := \left( \partial_\mu + C_\mu^a \mathbf{1}_S \otimes F_a + W_\mu^b \mathbf{1}_S \otimes T_b + B_\mu \mathbf{1}_S \otimes Y \right) \psi. \quad (4.16)$$

In diesem Fall sind  $F_a$ ,  $T_b$ ,  $Y$  die Generatoren der Fermiondarstellung der  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ,  $\tau_b$ ,  $b = 1, 2, 3$  die Pauli-Matrizen. Weiter seien  $\lambda, \mu^2 > 0$  reelle Konstanten und  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Diese Form ermöglicht es, die physikalischen Parameter von (4.12) und (4.13) durch die Modell-Parameter der Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren auszudrücken.

Bei dieser Betrachtung wird eine leichte Verallgemeinerung vorgenommen. Man ändert den Pauli-Dirac-Yukawa-Operator wie folgt:

$$\begin{aligned} D'_{PY} &= D + \Phi + \mathcal{I}(\gamma(a_2 F^{\mathcal{E}/S} + a_3 \nabla^{\text{End}\mathcal{E}} \Phi' + a_0 \Phi^{2'})), \\ \Phi' &:= \Gamma \otimes \phi', \quad \phi' := \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\phi}' \\ \tilde{\phi}' & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wobei gilt:

$$\tilde{\phi}' := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} \Lambda^{q'} \varphi_1 & \Lambda^q \bar{\varphi}_2 \\ \Lambda^{q'} \varphi_2 & -\Lambda^q \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (\Lambda_y^\ell \varphi_1, \Lambda_y^\ell \varphi_2) \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{q'}, \Lambda^q, \Lambda^\ell \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \quad (4.18)$$

für das Standardmodell, und

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}' &:= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 \otimes \begin{pmatrix} \Lambda^{q'} \varphi_1 & \Lambda^q \bar{\varphi}_2 \\ \Lambda^{q'} \varphi_2 & -\Lambda^q \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \Lambda^{\ell'} \varphi_1 & \Lambda^\ell \bar{\varphi}_2 \\ \Lambda^{\ell'} \varphi_2 & -\Lambda^\ell \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\ \Lambda^{q'}, \Lambda^q, \Lambda^{\ell'}, \Lambda^\ell &\in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}), \end{aligned} \quad (4.19)$$

für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos, so zeigt es sich, wenn man die Wirkungen für diesen modifizierten Pauli-Dirac-Yukawa-Operator auswertet, dass sich das Ergebnis auf die Form der Gleichungen (4.13) und (4.12) bringen lässt (s. [Tol]). Insbesondere bleibt die Fermionenwirkung unverändert. Man erhält den ursprünglichen Pauli-Dirac-Yukawa-Operator durch die Substitution  $\Lambda^{q',q,\ell',\ell} \rightarrow g_y^{q',q,\ell',\ell}$  zurück.

Beim Auswerten des bosonischen Funktionals stellt sich des Weiteren aufgrund von Gleichung (3.37) heraus, dass ein anderes relatives Vorzeichen zwischen dem Term mit dem Riemannschen Krümmungsskalar und den übrigen Termen auftritt als in Gleichung (4.13).

Nach Parameteridentifikation erhält man (s. [Tol]):

**Lemma 4.2.** *Die Wirkungen des DEHYMH-Modells für den Dirac-Operator des Standardmodells stimmen mit der Wirkung des Standardmodells überein genau dann, wenn die folgenden Parameterbeziehungen gelten:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= 4\alpha_2(3y_q N \lambda_q + y_\ell \text{tr}(\lambda_\ell)), \\ \frac{1}{g_2^2} &= 2\alpha_2(3\lambda_q N + \text{tr}(\lambda_\ell)), \\ \frac{1}{g_3^2} &= 8\alpha_2 N \lambda_q, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\alpha_0(3\lambda_q \text{tr}((\Lambda'^{q*} \Lambda'^q)^2 + (\Lambda^{q*} \Lambda^q)^2) + \text{tr}(\lambda_\ell (\Lambda^{\ell*} \Lambda^\ell)^2)), \\ 1 &= 2\alpha_3(3\lambda_q \text{tr}(\Lambda'^{q*} \Lambda'^q + \Lambda^{q*} \Lambda^q) + \text{tr}(\lambda_\ell (\Lambda^{\ell*} \Lambda^\ell))), \\ \mu^2 &= 2\alpha_4(3\lambda_q \text{tr}(g^{d'*} g^{d'} + g^{u*} g^u) + \text{tr}(\lambda_\ell g^{\ell*} g^\ell)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

mit

$$\begin{aligned} y_q &:= 2(y_L^q)^2 + (y_R^q)^2 + (y_R^u)^2, \\ y_\ell &:= 2(y_L^\ell)^2 + (y_R^\ell)^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Des Weiteren geht hier noch über die Koeffizienten  $\alpha_i$  der Endomorphismus  $z$  ein, der in diesem Fall die Form hat:

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} z_L & 0 \\ 0 & z_R \end{pmatrix}, \\ z_L &= \begin{pmatrix} \lambda_q \mathbf{1}_{6N} & 0 \\ 0 & \lambda_\ell \otimes \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \\ z_R &= \begin{pmatrix} \lambda_q \mathbf{1}_{6N} & 0 \\ 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix}, \\ \text{tr}_E z &= 3(4N \lambda_q + \text{tr}(\lambda_\ell)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Für den Fall  $\phi = \phi'$  ist  $\lambda_\ell = \text{diag}(\lambda_{\ell 1}, \dots, \lambda_{\ell N})$ . Bei beliebigen  $\phi'$  gilt:  $\lambda_\ell = \lambda' \mathbf{1}_N$ . Die Komponenten von  $\lambda_\ell$  und  $\lambda_q$  sind positive reelle Zahlen. Die Koeffizienten  $\alpha_i$  sind durch die Gleichungen (3.39) gegeben, wobei aber  $z$  für  $z'$  zu setzen ist.

**Beweis:** Siehe [Tol]. Es ist zu beachten, dass sich die Beziehungen für die Eichkopplungen von denen in [Tol] um einen Faktor Zwei unterscheiden. Dies rührt von einer unterschiedlichen Definition der Komponenten  $F_{ij}^{\mathcal{E}}$  her.  $\square$

Für das Dirac-Modell mit dem Dirac-Operator für das  $R - \nu$ -SM ergeben sich die folgenden Parameterbeziehungen:

**Lemma 4.3.** *Die Wirkungen des Dirac-Modells für den Dirac-Operator des Standardmodells mit rechtshändige Neutrinos fallen mit den Wirkungen des Standardmodells zusammen genau dann, wenn die folgenden Parameterbeziehungen gelten.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_1^2} &= 4\alpha_2(3N y_q \lambda_q + y_\ell \text{tr}(\lambda^\ell)), \\ \frac{1}{g_2^2} &= 2\alpha_2(3N \lambda_q + \text{tr}(\lambda^\ell)), \\ \frac{1}{g_3^2} &= 8\alpha_2 N \lambda_q\end{aligned}\tag{4.24}$$

und

$$\begin{aligned}\lambda &= 2\alpha_0(3\lambda_q \text{tr}((\Lambda'^q \Lambda'^{q*})^2 + (\Lambda^q \Lambda^{q*})^2) + \text{tr}(\lambda^\ell((\Lambda'^\ell \Lambda'^{\ell*})^2 + (\Lambda^\ell \Lambda^{\ell*})^2))), \\ 1 &= 2\alpha_3(3\lambda_q \text{tr}(\Lambda'^q \Lambda'^{q*} + \Lambda^q \Lambda^{q*}) + \text{tr}(\lambda^\ell(\Lambda'^\ell \Lambda'^{\ell*} + \Lambda^\ell \Lambda^{\ell*}))), \\ \mu^2 &= 2\alpha_4(3\lambda_q \text{tr}(g^{d'} g^{d'*} + g^u g^{u*}) + \text{tr}(\lambda^\ell(g'^\ell g'^{\ell*} + g^\ell g^{\ell*}))).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned}y_q &:= 2(y_L^q)^2 + (y_R^{d'})^2 + (y_R^u)^2, \\ y_\ell &:= 2(y_L^\ell)^2 + (y_R^e)^2 + (y_R^\nu)^2.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Des Weiteren sind die Koeffizienten  $\alpha_i$  durch die Gleichungen (3.39) gegeben, wobei  $z'$  durch  $z$  zu ersetzen ist. Der Endomorphismus  $z$  aus der Kommutanten ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}z &= \begin{pmatrix} z_L & 0 \\ 0 & z_R \end{pmatrix}, \\ z_L &= z_R = \begin{pmatrix} \lambda_q \mathbf{1}_3 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \lambda^\ell \otimes \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \\ \text{tr}_E(z) &= 4(3N \lambda_q + \text{tr}(\lambda^\ell)).\end{aligned}\tag{4.27}$$

Dabei ist  $\lambda^\ell = \lambda_\ell \mathbf{1}_N$  mit  $\lambda_\ell > 0$ .

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen, das heißt, man setzt die Terme des verallgemeinerten Dirac-Operators aus (4.2) in die Formel (3.38) ein, bestimmt die Kommutante  $\tilde{\zeta}$  und daraus den Anteil des Endomorphismus  $z$  und wertet dann die Spuren über die Endomorphismen summandenweise aus. Es werden im Folgenden die wichtigsten Zwischenergebnisse angegeben. Zunächst hat das Bündel  $\tilde{\mathcal{E}}$  aus Theorem 3.1 die Struktur  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{S} \otimes \tilde{E}$ , wobei  $\mathcal{S}$  ein Spinor-Bündel ist und  $\tilde{E} = E \oplus E$  das verdoppelte Bündel der inneren Freiheitsgrade.



Nach Lemma 3.27 hat  $\tilde{\zeta}$  die Form  $\tilde{\zeta} = \mathbf{1}_S \otimes \tilde{z}$ . Mit Hilfe der Eigenschaften

$$\begin{aligned} [\chi_{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\zeta}] &= 0 \\ [\tilde{D}_\phi, \tilde{\zeta}] &= 0 \\ \tilde{E} &= E \oplus E \end{aligned}$$

lässt sich zeigen, dass

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

gilt. Weiter folgt aus den Forderungen, dass für  $z$  gelten muss:

$$[\rho(g), z] = 0, \quad \forall g \in G,$$

dass  $z$  die behauptete Gestalt hat. Für die einzelnen Terme erhält man dann:

$$\mathrm{tr}_E(z + z) = 24N\lambda_q + 8\mathrm{tr}(\lambda^\ell),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_E((z + z)(\nabla_\mu \phi')(\nabla^\mu \phi')) &= -4(3\lambda_q(\mathrm{tr}(\Lambda'^q \Lambda'^{q*})(\partial_\mu \mathbf{1}_2 + W_\mu + \Delta_\mu^{d'} \mathbf{1}_2)\varphi \\ &\quad (\partial^\mu \mathbf{1}_2 + W^{\mu\dagger} + \bar{\Delta}^{d'\mu} \mathbf{1}_2)\bar{\varphi} \\ &\quad + \mathrm{tr}(\Lambda^q \Lambda^{q*})(\partial_\mu \mathbf{1}_2 + W_\mu^\dagger - \bar{\Delta}_\mu^u)\bar{\varphi} \cdot \\ &\quad (\partial^\mu \mathbf{1}_2 + W^\mu - \Delta^{u\mu} \mathbf{1}_2)\varphi) \\ &\quad + \mathrm{tr}(\lambda^\ell \Lambda'^\ell \Lambda'^{\ell*})(\partial_\mu \mathbf{1}_2 + W_\mu + \Delta_\mu^e \mathbf{1}_2)\varphi \cdot \\ &\quad (\partial^\mu \mathbf{1}_2 + W^{\mu\dagger} + \bar{\Delta}^{e\mu} \mathbf{1}_2)\bar{\varphi} \\ &\quad + \mathrm{tr}(\lambda^\ell \Lambda^\ell \Lambda^{\ell*})(\partial_\mu \mathbf{1}_2 + W_\mu^\dagger - \bar{\Delta}_\mu^\nu \mathbf{1}_2)\bar{\varphi} \cdot \\ &\quad (\partial^\mu \mathbf{1}_2 + W^\mu - \Delta^{\nu\mu})\varphi), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^{d'} &= i(y_L^q - y^{d'})b_\mu \\ \Delta_\mu^u &= i(y_L^q - y_R^u)b_\mu \\ \Delta_\mu^e &= i(y_L^\ell - y_R^e)b_\mu \\ \Delta_\mu^\nu &= i(y_L^\ell - y_R^\nu)b_\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_E((z + z)F_{\mu\nu}^E F^{E\mu\nu}) &= 2(4N\lambda_q \mathrm{tr}(C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}) \\ &\quad + (3N\lambda_q + \mathrm{tr}(\lambda^\ell))\mathrm{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) \\ &\quad + (3N\lambda_q(2y_L^{q2} + y_R^{d'2} + y_R^{u2}) \\ &\quad + \mathrm{tr}(\lambda^\ell)(2y_L^{\ell2} + y_R^{e2} + y_R^{\nu2}))B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

$C_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  sind die Komponenten der Krümmungen zu  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  beziehungsweise  $U(1)$ . Wobei  $B_\mu = ib_\mu$  gilt.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_E((z + z)\phi'^4) &= \\ &4(3\lambda_q \mathrm{tr}((\Lambda'^q \Lambda'^{q*})^2 + (\Lambda^q \Lambda^{q*})^2) + \mathrm{tr}(\lambda^\ell (\Lambda'^\ell \Lambda'^{\ell*})^2 + (\Lambda^\ell \Lambda^{\ell*})^2))|\varphi|^4 \\ &|\varphi| := |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2, \end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}_E((z+z)\phi^2) = -4(3\lambda_q \mathrm{tr}(g'^q g'^{q*} + g^q g^{q*}) + \mathrm{tr}(\lambda^\ell (g'^\ell g'^{\ell*} + g^\ell g^{\ell*})))|\varphi|^2.$$

Nutzt man die Hyperladungbeziehungen (4.11) aus, so ergibt sich das behauptete Ergebnis.  $\square$

## Kapitel 5

# Physikalische Konsequenzen der Parameterbeziehungen

In diesem Abschnitt werden die physikalischen Konsequenzen aus den im vorangegangenen Kapitel diskutierten Parameterbeziehungen für das Standardmodell ohne und mit rechtshändigen Neutrinos diskutiert.

### 5.1 Normierung und einfache Konsequenzen

Um eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit denen anderer Arbeiten sowie die Kompatibilität zu den später benutzten Renormierungsgruppengleichungen zu gewährleisten, ist eine Reskalierung der in der Wirkung auftretenden Felder und Konstanten notwendig. Die im Folgenden gewählte Normierung entspricht der in [Io,Sch] und ist durch die folgenden Ersetzungen gegeben:

$$\begin{aligned} g_1, g_2, g_3 &\longrightarrow g_1, g_2, g_3 \\ g_f &\longrightarrow \sqrt{2}g_f \\ \mu^2 &\longrightarrow \mu^2 \\ \lambda &\longrightarrow 4\lambda. \end{aligned} \tag{5.1}$$

$g_f$  bezeichnet die Yukawa-Kopplungskonstanten für die Fermionen. Des Weiteren muss das skalare Higgs-Felds  $\varphi$  wie folgt reskaliert werden:

$$\varphi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi.$$

Darüberhinaus wird für die Matrizen  $\Lambda^q, \Lambda^{q'}$ ,  $\Lambda^\ell$  und  $\Lambda^{\ell'}$ , da sie später mit den Yukawa-Kopplungskonstanten identifiziert werden sollen, folgende Reskalierung gewählt:

$$\Lambda^q, \Lambda^{q'}, \Lambda^\ell, \Lambda^{\ell'} \longrightarrow \sqrt{2}\Lambda_q, \sqrt{2}\Lambda^{q'}, \sqrt{2}\Lambda^\ell, \sqrt{2}\Lambda^{\ell'}. \tag{5.2}$$

Die übrigen Felder und Konstanten ändern sich nicht.

Mit dieser Reskalierung erhalten die Parameterbeziehungen (4.20), (4.21) für das Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos die folgende Form:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= 2A \frac{3Ny_q + y_\ell \text{tr} X}{4N + \text{tr} X}, \\
\frac{1}{g_2^2} &= A \frac{3N + \text{tr} X}{4N + \text{tr} X}, \\
\frac{1}{g_3^2} &= 4A \frac{N}{4N + \text{tr} X},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 2B \frac{3\text{tr}(\Lambda^{q'} \Lambda^{q'^*} + \Lambda^q \Lambda^{q*}) + \text{tr}(X(\Lambda^\ell \Lambda^{\ell*}))}{4N + \text{tr} X}, \\
\lambda &= C \frac{3\text{tr}((\Lambda^{q'} \Lambda^{q'^*})^2 + (\Lambda^q \Lambda^{q*})^2) + \text{tr}(X(\Lambda^\ell \Lambda^{\ell*})^2)}{4N + \text{tr} X},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\ell_p} \right)^2 \frac{3\text{tr}(g^{d'} g^{d'^*} + g^u g^{u*}) + \text{tr}(X g^\ell g^{\ell*})}{4N + \text{tr} X}. \tag{5.5}$$

Hierbei sind folgende Abkürzungen verwendet worden:

$$X := \frac{\lambda^\ell}{\lambda_q}, \tag{5.6}$$

$$A := \frac{2n-3}{4\pi} \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 a_2^2, \tag{5.7}$$

$$B := \frac{n-1}{\pi} \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 a_3^2, \tag{5.8}$$

$$C := \frac{1}{2} \frac{2n-1}{\pi} \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 a_0^2. \tag{5.9}$$

Für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos (s. (4.24), (4.25)) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= 2A' \frac{3Ny_q + y_\ell \text{tr}(X)}{3N + \text{tr}(X)}, \\
\frac{1}{g_2^2} &= A', \\
\frac{1}{g_3^2} &= 4A' \frac{N}{3N + \text{tr}(X)},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 2B' \frac{3\text{tr}(\Lambda^{q'} \Lambda^{q'^*} + \Lambda^q \Lambda^{q*}) + \text{tr}(X(\Lambda^{\ell'} \Lambda^{\ell'^*} + \Lambda^\ell \Lambda^{\ell*}))}{3N + \text{tr}(X)}, \\
\lambda &= C' \frac{3\text{tr}((\Lambda^{q'} \Lambda^{q'^*})^2 + (\Lambda^q \Lambda^{q*})^2) + \text{tr}(X((\Lambda^{\ell'} \Lambda^{\ell'^*})^2 + (\Lambda^\ell \Lambda^{\ell*})^2))}{3N + \text{tr}(X)} \tag{5.11}
\end{aligned}$$

$$\mu^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\ell_p^2} \frac{3\text{tr}(g^{q'} g^{q'^*} + g^q g^{q*}) + \text{tr}(X(g^{\ell'} g^{\ell'^*} + g^\ell g^{\ell*}))}{3N + \text{tr}(X)}, \tag{5.12}$$

wobei folgenden Abkürzungen verwendet worden:

$$\begin{aligned}
X &:= \frac{\lambda^\ell}{\lambda_q}, \\
A' &:= \frac{3}{16} \frac{2n-3}{\pi} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_2^2, \\
B' &:= \frac{3}{4} \frac{n-1}{\pi} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_3^2, \\
C' &:= \frac{3}{8} \frac{2n-1}{\pi} \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2 a_0^2.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

An dieser Stelle lassen sich für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos schon einige einfache physikalische Folgerungen ziehen:

Mit Hilfe der *Gell-Mann-Nishijima-Beziehung* (s. [Na])

$$Q = T_3 + Y, \tag{5.14}$$

die einen Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung, hier beschrieben durch die Eigenwerte des *Ladungsgenerators*  $Q$ , einem Generator  $T_3$  der  $SU(2)$  und dem *Hyperladungsgenerator*  $Y$  beschreibt, lassen sich die Hyperladungen  $y_R^\nu$  der rechtshändigen Neutrinos bestimmen. Diese Relation ist eine Konsequenz des Phänomens der *spontanen Symmetriebrechung* (siehe hierzu [Tol2]).

Betrachtet man nun die  $SU(2)$ -Transformationen für die rechtshändigen Elektronen und die rechtshändigen Neutrinos, so muss der Generator  $T_3$  auf die rechtshändigen Elektronen und Neutrinos angewendet Null ergeben, da  $SU(2)$  hier trivial operiert (s. Def. 4.2). Für die rechtshändigen Elektronen und die rechtshändigen Neutrinos ist die Hyperladungstransformation gegeben durch:

$$\rho_{\ell R}(\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_2, b) = \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} e^{iy_R^e b} & 0 \\ 0 & e^{iy_R^\nu b} \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

siehe hierzu auch Definition 4.2. Damit ergibt sich durch Übergang zur Algebra der Generatoren:

$$Y_R = \mathbf{1}_N \otimes \begin{pmatrix} iy_R^e & 0 \\ 0 & iy_R^\nu \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Da der  $SU(2)$ -Generator auf  $E_R$  trivial operiert, gilt:

$$Q_R = Y_R. \tag{5.17}$$

Man fordert nun aus physikalischen Gründen, dass die elektrische Ladung des rechtshändigen Neutrinos verschwinden soll, da ein Neutrino nach Definition elektrisch neutral ist, muss gelten:

$$y_R^\nu = 0. \tag{5.18}$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man die bekannten Werte für die Hyperladungen (s. [Na], [Tol])

$$(y_L^q, y_L^\ell) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right) \tag{5.19}$$

$$((y_R^d, y_R^u), y_R^e) = \left(\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), -1\right) \tag{5.20}$$

in die Hyperladungsbeziehungen (4.11) einsetzt.

Berechnet man des Weiteren das Quadrat des Sinuses des *elektro-schwachen* (*Weinberg-*) *Winkels* so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &:= \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} \\ &= \frac{1+x}{1+2y_q + (1+2y_\ell)x},\end{aligned}\quad (5.21)$$

mit

$$x := \frac{\text{tr}(\lambda^\ell)}{\lambda_q}.\quad (5.22)$$

Hierbei sind  $\lambda^\ell$ ,  $\lambda_q$ ,  $y_q$ ,  $y_\ell$  die in Lemma 4.3 definierten Parameter. Setzt man nun für  $y_q$  und  $y_\ell$  numerische Werte ein, so erhält man genau dasselbe Resultat für  $\sin^2 \theta_W$  wie für das Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos (s. hierzu [Tol]).

Daraus folgt, dass  $\sin^2 \theta_w$ , für die sich aus den Hyperladungen ergebenden Werte  $y_q = \frac{11}{18}$  und  $y_\ell = \frac{3}{2}$ , beschränkt ist:

$$\frac{1}{4} < \sin^2 \theta_w < \frac{9}{20}.\quad (5.23)$$

Weiter stellt sich heraus, dass die Verhältnisse der Kopplungskonstanten  $\frac{g_i^2}{g_j^2}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$  in beiden Modellen gleich sind. Man erhält:

$$\frac{g_1^2}{g_2^2} = \frac{1}{2} \frac{3+x}{3y_q + y_\ell x}, \quad \frac{g_1^2}{g_3^2} = \frac{2}{3y_q + y_\ell x}, \quad \frac{g_2^2}{g_3^2} = \frac{4}{3+x}, \quad x := \frac{\text{tr}(X)}{N}.\quad (5.24)$$

Ferner sind diese Verhältnisse für die Grenzübergänge  $x \rightarrow 0, \infty$  beschränkt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1^2}{g_3^2} &= \frac{2}{3y_q}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1^2}{g_2^2} &= \frac{1}{2y_q}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_2^2}{g_3^2} &= \frac{4}{3}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_1^2}{g_3^2} &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_1^2}{g_2^2} &= \frac{1}{2y_\ell}, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g_2^2}{g_3^2} &= 0.\end{aligned}\quad (5.25)$$

## 5.2 Einfluss von Quanten-Korrekturen

### 5.2.1 Renormierungsgruppengleichungen

Im Folgenden soll nun der Einfluss von Quanten-Korrekturen auf die im Kapitel 4 hergeleiteten Parameterbeziehungen für das Standardmodell mit und ohne rechtshändige Neutrinos untersucht werden. Dazu ist zu sagen, dass die im Kapitel 4 hergeleiteten Wirkungen physikalisch als „*klassisch*“ anzusehen sind, was bedeutet, dass „*Quanten-Effekte*“ nicht berücksichtigt werden.

Um Quanten-Effekte mit in Betracht zu ziehen, muss die Theorie *quantisiert* werden, was bedeutet, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* mitberücksichtigt werden muss. Was dies im konkreten Fall heißt, hängt von dem gewählten *Quantisierungsverfahren* ab.

Die *Heisenbergsche Unschärferelation* ist durch die Ungleichung

$$\Delta x \Delta k \geq 1 \quad (5.26)$$

gegeben. Hierbei wurden so genannte natürliche Einheiten verwendet ( $\hbar = 1$ ,  $\hbar$  ist das Plancksche Wirkungsquantum dividiert durch  $2\pi$ ).  $\Delta x$ ,  $\Delta k$  sind die Fehler, mit denen die Orts- und Impuls-Koordinaten eines Teilchens bestimmt werden können.

Die Unschärferelation lässt sich auf stochastische Weise interpretieren, nämlich dass das Teilchen innerhalb eines Phasenraumvolumenelementes  $\Delta x \Delta k$  fluktuiert.

Die nun folgenden Ausführungen sollen dazu dienen zu erläutern, wie sich die Unschärferelation in Feld-Theorien berücksichtigen lässt. Es sollen dabei die grundlegenden Ideen und Konsequenzen vorgestellt werden. Bei diesen Ausführungen kann, aufgrund des gegebenen Rahmens, weder Vollständigkeit noch Rigorosität das Ziel sein, so dass die hier gemachten Erläuterungen skizzenhaft und exemplarisch bleiben müssen. Für tiefer gehende Details bleibt nur der Verweis auf die zu diesem Thema umfangreiche Literatur (s. u.a. [Col], [Ram], [Sal]).

### Pfadintegrale und Greensfunktionen

Ausgangspunkt für die Quantisierung einer Feld-Theorie ist das klassische Wirkungsfunktional in  $d$  Dimensionen:

$$S[A, \psi, \phi, \dots] = \int d^d x \mathcal{L}(A, \psi, \phi, \dots). \quad (5.27)$$

$A, \psi, \phi$  bezeichnen hierbei die verschiedenen Felder, von denen die Theorie abhängt, und  $\mathcal{L}(A, \psi, \phi, \dots)$  ist die so genannte *Lagrangedichte*, eine Funktion, die polynomial in den Feldern und deren Ableitungen ist. Die nun folgenden Ausführungen werden für einen flachen vier-dimensionalen euklidischen Raum gemacht. Die Beschränkung auf einen euklidischen Raum wird gewählt, da zum einen die Modelle in Kapitel 4 für Riemannsche Mannigfaltigkeiten formuliert sind, zum anderen da Feld-Theorien, die auf einem Minkowski Raum formuliert sind, erst in Feld-Theorien in einem euklidischen Raum mittels *Wick-Rotation* transformiert werden müssen, um die im Folgenden beschriebenen Pfadintegral-Methoden anwenden zu können. Zur Verdeutlichung der folgenden Erläuterungen soll die so genannte  $\phi^4$ -Theorie für ein skalares Feld in vier Dimensionen dienen. Die klassische Wirkung dieser Theorie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S[\phi] &:= \int d^4 x \mathcal{L}(\phi), \\ \mathcal{L}(\phi) &:= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Hier ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$  der Schwarz-Raum der schnell abfallenden Funktionen von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}$ . Die *physikalischen* Funktionen  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$  sind nach Definition durch die Minima des Funktionals  $S$  gegeben. Die Indizes  $\mu$  beziehen sich auf Koordinatenbasen und es sei  $\partial^\mu := g^{\mu\nu} \partial_\nu$ , wobei  $g^{\mu\nu}$  die Komponenten der flachen Metrik auf  $\mathbb{R}^4$  sind.

Für die Quantisierung dieser Theorie wird ein *stochastischer* Standpunkt eingenommen. Im Falle eines euklidischen Raumes lassen sich dabei die Felder als Zufallsvariablen interpretieren. Das fundamentale Objekt in diesem Zugang ist das so genannte *erzeugende Funktional* (hier für den Fall der  $\phi^4$ -Theorie):

$$Z[J] := \frac{\int D\phi e^{-S[\phi] - \int d^4x \phi(x) J(x)}}{\int D\phi e^{-S[\phi]}}. \quad (5.29)$$

Die Funktional- oder Pfadintegrale

$$\int D\phi e^{-S[\phi]}$$

lassen sich als Kontinuums-Limes von

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \int d\phi(x_i) e^{-S_d[\phi]}$$

auffassen, dabei sind die  $x_i$  die Gitter-Punkte eines kubischen Gitters, das den 4-dimensionalen euklidischen Raum diskretisiert.  $S_d$  ist die diskretisierte Wirkung. Der Grenzübergang ist so zu verstehen, dass die Gitterkonstante gegen Null läuft. Hierzu ist allerdings zu sagen, dass die angedeutete Prozedur im Allgemeinen nicht wohldefiniert ist und divergente Ausdrücke liefert. Andererseits kann man den Funktionalintegralen auf zwei Weisen doch einen Sinn geben. Zum einen können sie als formale Ausdrücke gesehen werden, für die bestimmte formale Manipulationen existieren, die wiederum formale Ausdrücke liefern, welche sich physikalisch sinnvoll interpretieren lassen. Aus Gründen der Bequemlichkeit wird im Folgenden dieser Standpunkt eingenommen. Die andere, rigorosere Sichtweise ist die, dass man diesen Ausdruck tatsächlich nur auf einem Gitter mit einer endlichen Gitterkonstante  $a$  betrachte und dort alle Manipulationen vornimmt, wo sie wohldefiniert sind, und erst am Ende aller Rechnungen den Grenzübergang vornimmt. Eine derartige Behandlung der  $\phi^4$ -Theorie findet sich zum Beispiel in [Sal]. Bei beiden Zugängen ist es allerdings so, dass sie letztendlich auf divergente Ausdrücke führen, die regularisiert werden müssen, was tief greifende physikalische Implikationen hat.

Das erzeugende Funktional kann als ein formaler Ausdruck gesehen werden, in dem alle zugänglichen Informationen über das beschriebene physikalische System kodiert sind. Die Aufgabe der Quantenfeldtheorie besteht nun darin diese Informationen, eventuell nur näherungsweise, aus dem erzeugenden Funktional zu berechnen.

Die interessierenden Größen in der Quantenfeldtheorie sind Übergangsamplituden bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen des Systems bei Streuprozessen. Für deren Bestimmung sind die so genannten *n-Punkt-* oder *Greensfunktionen* wichtig. Diese sind formal definiert:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{\int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S[\phi]}}{\int D\phi e^{-S[\phi]}} \quad (5.30)$$

Hierzu sei angemerkt, dass sich  $G_n(x_1, \dots, x_n)$  aus  $Z[J]$  gewinnen lässt, indem man  $n$  formale Funktionalableitungsoperatoren  $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$  (zur Definition s. z.B. [Zi]



Kap. 1.5) auf  $Z[J]$  anwendet. Man erhält (s. z.B. [Ram]):

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = (-1)^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}, \quad (5.31)$$

so dass sich jede  $n$ -Punkt-Funktion mit  $Z[J]$  erzeugen lässt. Auf die Operatoren  $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$  wird nicht weiter eingegangen, da sie nicht weiter gebraucht werden.

Für die  $\phi^4$ -Theorie ergibt sich dann z.B. für die 2-Punkt-Funktion bis zur Ordnung  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} G_2(x_1, x_2) &= \Delta(x_1 - x_2) - 12\lambda \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x) \Delta(x - x_2) \\ &\quad + 96\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^3(x - y) \Delta(y - x_2) \\ &\quad + 144\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^2(x - y) \Delta(y - y) \Delta(y - x_2) \\ &\quad + 144\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x) \Delta(x - y) \cdot \\ &\quad \Delta(y - y) \Delta(y - x_2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\lambda^3) + R_2, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\Delta(x - y) := \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2}.$$

Die hier auftretenden Ausdrücke  $\Delta(x - y)$  sind als Distributionen zu verstehen. Die in  $R_2$  enthalten Ausdrücke sind so genannte *nichtzusammenhängende* Terme. Das sind Terme, wo sich mindestens ein Ausdruck in einer Variablen  $x_i$  abfaktorieren lässt. Solche Terme lassen sich als Produkte von  $n$ -Punkt-Funktionen in niedriger Ordnung in  $n$  auffassen. Die für die folgenden Betrachtungen relevanten Terme stehen in den so genannten *zusammenhängenden*  $n$ -Punkt-Funktionen:

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) := G_n(x_1, \dots, x_n) - R_n. \quad (5.33)$$

Details zur Bestimmung der  $n$ -Punkt-Funktionen finden sich z.B. in [Ram], wobei allerdings  $\lambda$  durch  $\frac{\lambda}{4!}$  zu ersetzen ist.

Im Folgenden ist es günstig, die Fourier-Transformation der  $n$ -Punkt-Funktionen zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_2(p, -p) &= \frac{1}{p^2 + m^2} - 12\lambda \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q}{(\sqrt{2\pi})^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \\
&+ 96\lambda^2 \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q_1}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \cdot \\
&\int \frac{d^4 q_2}{(\sqrt{2\pi})^4} \int \frac{d^4 q_3}{(\sqrt{2\pi})^4} \frac{2\pi^2 \delta(p - q_1 - q_2 - q_3)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)(q_3^2 + m^2)} \\
&+ 144\lambda^2 \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \cdot \\
&\int \frac{d^4 \ell_1}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \int \frac{d^4 \ell_2}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \frac{\delta(p - \ell_1 - \ell_2)(2\pi)^4}{(\ell_1^2 + m^2)(\ell_2^2 + m^2)} \\
&+ 144 \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \int \frac{d^4 \ell}{(\sqrt{2\pi^2})^4} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \\
&+ \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Siehe hierzu auch [Ram], wobei dort aufgrund eines anderen Normierungsfaktors bei der Fourier-Transformation statt des Faktors  $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}$  der Faktor  $\frac{1}{(2\pi)^4}$  auftritt.

### Divergenzen und dimensionale Regularisierung

Betrachtet man nun die einzelnen Terme der 2-Punkt-Funktion  $\tilde{\Gamma}_2(p, -p)$ , so stellt man fest, dass divergente Ausdrücke auftreten, wie z.B. Terme der Form:

$$T = -12\lambda \int \frac{d^4 q}{(\sqrt{2\pi})^4} \frac{1}{q^2 + m^2}. \tag{5.35}$$

Es stellt sich heraus, dass das obige Integral divergiert. Dies lässt sich leicht verifizieren, wenn man zu sphärischen Koordinaten übergeht. Das Integral über die Radialkoordinate hat dann die Form:  $\int_0^\infty dr \frac{r^3}{r^2 + m^2}$ . Dieses Integral ist sicher divergent. Bei der Durchsicht der Summanden von  $\tilde{\Gamma}_2$  finden sich noch weitere divergente Terme. Das gleiche Problem tritt auch bei n-Punkt-Funktionen höherer Ordnung auf.

Die Aufgabe ist es nun, ein Regularisierungsverfahren zu finden, das es erlaubt, den divergenten Integralen einen Wert zuzuordnen, so dass sich die daraus entstehenden Ausdrücke physikalisch sinnvoll interpretieren lassen. Ein hierfür häufig verwendetes Verfahren ist die *dimensionale Regularisierung*. Die Idee hierbei ist die Folgende: Man beobachtet, dass das Integral

$$I = \int d^d q \frac{1}{q^2 + m^2} \tag{5.36}$$

für  $d = 1$  konvergiert. Die Idee ist nun, eine auf einer Umgebung  $D \subset \mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $\tilde{I}$  in der Variablen  $d$  zu finden, so dass gilt:  $1 \in D$  und  $\tilde{I}(1) = I$  für  $d = 1$ . Des Weiteren soll die analytische Fortsetzung von  $\tilde{I}$  auf ganz  $\mathbb{C}$  bei 4 einen Pol besitzen, um das divergente Verhalten von  $I$  im Fall  $d = 4$  widerzuspiegeln. Eine Methode von 't Hooft und Veltman, die auf der analytischen

Fortsetzung der  $\Gamma$ -Funktion auf komplexe Zahlen mit negativem Realteil beruht, liefert:

$$\tilde{I}(\omega) = \pi^\omega \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1)} \frac{1}{(m^2)^{1-\omega}}, \quad \omega := \frac{d}{2}. \quad (5.37)$$

Hier ist mit  $\Gamma$  die  $\Gamma$ -Funktion gemeint. Die Herleitung dieses Ausdruckes findet sich in [Ram] Kapitel 4. Dieser Ausdruck hat den Vorzug, dass sich die singulären Punkte mit Methoden der Funktionentheorie untersuchen lassen, denn die Singularitäten von  $\tilde{I}$  sind die Singularitäten der  $\Gamma$ -Funktion. Man kann nun um die singulären Stellen eine Laurent-Entwicklung machen. Man erhält für  $d = 4n$  bzw.  $\omega = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(-n + \varepsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \psi(n+1) + \frac{1}{2}\varepsilon \left( \frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1) \right) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \psi(n+1) &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma, \\ \psi'(n+1) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

$\gamma$  ist hier die *Euler-Mascheroni-Konstante* mit  $\gamma = 0.5772\dots$ . Somit ergibt sich für  $\tilde{I}$  bei  $d \rightarrow 4$  bzw.  $\omega \rightarrow 2$  das Verhalten:

$$\lim_{\omega \rightarrow 2} \tilde{I}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 2} \left( -\pi^2 m^2 \left[ \frac{1}{2-\omega} + \psi(2) \right] \right). \quad (5.39)$$

Mit diesem Ausdruck gewinnt man nun eine eindeutige Aufspaltung von  $\tilde{I}$  in einen divergenten und einen endlichen Anteil für den Grenzübergang  $\omega \rightarrow 2$  bzw.  $d \rightarrow 4$ .

Für die weiteren divergenten Integrale in den n-Punkt-Funktionen lassen sich ähnliche Ausdrücke finden (s. [Ram]). Sei nun:

$$\tilde{T}(\omega) := \frac{-12\lambda}{(\sqrt{2\pi})^4} \tilde{I}(\omega). \quad (5.40)$$

Das weitere Vorgehen ist nun, die divergenten Ausdrücke  $T$  durch  $\tilde{T}$  zu ersetzen, da sich hier die Divergenz aufgrund von (5.39) in einem gewissen Sinn kontrollieren lässt. Allerdings tritt hierbei folgendes Problem auf:

Da das Funktional (5.28) ein physikalisches System beschreiben soll, besitzen die Raumzeitkoordinaten die physikalische Dimension einer Länge (s. Kap. 3), andererseits ist das Wirkungsfunktional dimensionslos. Dadurch werden die physikalischen Dimensionen des Feldes  $\phi$  und der Kopplung  $\lambda$  festgelegt. Da die Masse in natürlichen Einheiten (d.h.  $\hbar = c = 1$  wobei  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist) die physikalische Dimension einer Länge besitzt, ist  $\lambda$  im Fall der 4-dimensionalen  $\phi^4$ -Theorie dimensionslos. Aus Konsistenzgründen haben die Impulse die Dimension einer Masse bzw. einer inversen Länge. Damit ergibt sich, dass die 2-Punkt-Funktion  $\tilde{\Gamma}_2$  (5.34) die physikalische Dimension eines Längenquadrates bzw. inversen Massenquadrates besitzt. Nach dem eben Gesagten ist

$$\lim_{\omega \rightarrow 2} \tilde{I}(\omega) = I,$$

und  $I$  hat die physikalische Dimension eines Längenquadrates. Andererseits gilt:

$$\tilde{I}\left(\frac{1}{2}\right) = \int dq \frac{1}{q^2 + m^2}.$$

Dieser Ausdruck hat die physikalische Dimension einer inversen Länge. Auf der anderen Seite sollte aber  $\tilde{\Gamma}_2$ , aufgrund des ersten Summanden in (5.34), immer die physikalische Dimension eines inversen Längenquadrates besitzen. Dieses Problem lässt sich beheben, wenn man eine neue dimensionsbehaftete Kopplung  $\lambda_{neu}$  und eine Massen-Skala  $\mu$  einführt, so dass gilt:

$$\lambda_{alt} = (\mu)^{2-\omega} \lambda_{neu}. \quad (5.41)$$

Es zeigt sich, dass diese Beziehung für alle regularisierten n-Punkt-Funktionen die gleiche ist (s. [Ram]).

Betrachtet man nun den Term

$$\tilde{T} = -6 \frac{m^2 \lambda}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi \mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} \Gamma(1-\omega), \quad \lambda = \lambda_{neu}, \quad (5.42)$$

und entwickelt um  $\omega = 2$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\omega) &= -3 \frac{m^2 \lambda}{4\pi^2} \left[ 1 + (2-\omega) \ln \left( \frac{4\pi \mu^2}{m^2} \right) + \dots \right] \left[ -\frac{1}{2-\omega} - \psi(2) + \dots \right] \\ &= \frac{3m^2 \lambda}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{2-\omega} + \psi(2) - \ln \left( \frac{m^2}{4\pi \mu^2} \right) + \mathcal{O}(2-\omega) \right]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Diese Form ist geeignet, die Divergenzen zu beheben, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird. Allerdings zeigt sich hier ein Umstand, der auch bei anderen Typen von Termen bei regularisierten n-Punkt-Funktionen auftritt, nämlich dass der endliche Anteil an der Stelle  $\omega = 2$  von der zusätzlich eingeführten Massen-Skala  $\mu^2$  abhängig wird. Dieser Umstand hat weitreichende Konsequenzen.

## Regularisierung und Renormierungsgruppengleichungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde skizziert, wie man dem divergenten Term

$$T = -\frac{12\lambda}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^4q \frac{1}{q^2 + m^2}$$

der 2-Punkt-Funktion  $\tilde{\Gamma}_2(p, -p)$  mittels dimensionaler Regularisierung einen Term

$$\tilde{T} = \frac{3}{4} \lambda \frac{m^2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \psi(2) - \ln \left( \frac{m^2}{4\pi \mu^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad \varepsilon = 2 - \omega$$

zuordnen kann.  $\tilde{T}$  ist eine meromorphe Funktion in der komplexen Variablen  $\varepsilon$ , die mit  $T$  interpoliert, wenn die Dimension 1 gesetzt wird, und für  $\varepsilon = 0$  bzw.  $d = 2$  einen Pol besitzt.

Es ergibt sich die folgende Beobachtung: Man betrachtet eine modifizierte Wirkung, in der zu der Funktion  $\mathcal{L}$  aus (5.28) ein so genannter *Counterterm* der Form

$$\frac{3m^2}{8\pi^2} \lambda \left[ \frac{1}{\varepsilon} + F_1(\varepsilon, m^2, \mu) \right] \phi^2 \quad (5.44)$$

addiert wird.  $F_1$  ist hierbei eine beliebige Funktion, die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  analytisch ist. Bestimmt man nun mit dieser modifizierten Wirkung die 2-Punkt-Funktion bis zur ersten Ordnung in  $\lambda$ , so ergibt sich:

$$\tilde{\Gamma}_2(p, -p) = p^2 + m^2 \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{\lambda}{\pi^2} \left( \psi(2) - \ln \left( \frac{m^2}{4\pi^2 \mu^2} \right) - F_1 \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (5.45)$$

Durch eine Modifikation des  $\phi^2$ -Terms lässt sich also erreichen, dass die divergenten Terme der 2-Punkt-Funktion bis zur Ordnung  $\lambda$  eliminiert werden. Man erhält also eine bis in die erste Ordnung von  $\lambda$  eine divergenzfreie 2-Punkt-Funktion.

Die Idee zur Beseitigung der Divergenzen der n-Punkt-Funktion ist nun die folgende:

1. Man formuliere alle divergenten Terme der n-Punkt-Funktion auf analoge Weise, wie im vorherigen Abschnitt skizziert, um.
2. Man finde endlich viele Counterterme, die von der Struktur her denen der klassischen Wirkung gleichen, also die im  $\phi^4$ -Fall proportional zu  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ ,  $\phi^2$  oder  $\phi^4$  sind, so dass alle n-Punkt-Funktionen in jeder Ordnung der Kopplung endlich sind.

Lassen sich diese Bedingungen erfüllen, so heißt die Theorie *renormierbar*.

Die Existenz derartiger Counterterme ist im Allgemeinen nicht gegeben. Für die Renormierbarkeit der  $\phi^4$ -Theorie wird dies bis in die zweite Ordnung von  $\lambda$  in [Ram] explizit verifiziert. Aber im Allgemeinen sind diese Untersuchungen aufwendig und schwierig, so dass hier nur der Verweis auf die Literatur bleibt (Untersuchungen hierzu finden sich z.B. in [Col]).

Die  $\phi^4$ -Theorie ist in der Tat renormierbar (s. hierzu [’t Hooft, Veltman, Nucl. Phys. 448, 189 (1973)]), wie auch das Standardmodell.

Es stellt sich die Frage, welche Konsequenzen sich ergeben, wenn man zur Funktion  $\mathcal{L}$  aus (5.28) alle Counterterme hinzugefügt hat. Der Integrand des Wirkungsfunktional (5.28) lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\mathcal{L}^{ren} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{c.t.}, \quad (5.46)$$

wobei

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad (5.47)$$

die ursprüngliche Lagrangedichte ist, und

$$\mathcal{L}_{c.t.} := \frac{1}{2} A \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 B \phi^2 + \lambda \mu^{2\varepsilon} C \phi^4 \quad (5.48)$$

sind die zusammengefaßten Counterterme. Die mit Hilfe der durch  $\mathcal{L}^{ren}$  erzeugten n-Punkt-Funktionen haben die Eigenschaft, dass sie beim Übergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  endlich sind.  $A, B, C$  sind dabei allgemeine Funktionen von  $\varepsilon$  und  $\mu$ , die die Beiträge der Counterterme zusammenfassen.

Durch eine Redefinition der Felder, der Massen und der Kopplungen lässt sich  $\mathcal{L}^{ren}$  auf die Form

$$\mathcal{L}^{ren} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + m_0^2 \phi_0^2 + \lambda_0 \phi_0^4 \quad (5.49)$$

bringen. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &:= (1+A)^{\frac{1}{2}}\phi = Z_\phi^{\frac{1}{2}}\phi, \\
m_0^2 &:= m^2 \frac{1+B}{1+A} = m^2(1+B)Z_\phi^{-1}, \\
\lambda_0 &:= \lambda\mu^{2\varepsilon} \frac{1+C}{(1+A)^2} = \lambda\mu^{2\varepsilon}(1+C)Z_\phi^{-2}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Von dieser Umschreibung rührt der Name *Renormierung* für das skizzierte Verfahren her.

Die definierten Größen  $\phi_0$ ,  $m_0^2$ ,  $\lambda_0$  werden gewöhnlich als *nackte* Parameter bezeichnet. Sie divergieren beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf eine solche Weise, dass die von  $\mathcal{L}^{ren}$  erzeugten n-Punkt-Funktionen endlich sind. Die *renormierten* Parameter  $\phi$ ,  $m^2$ ,  $\lambda$  sind dagegen endlich, wenn auch im Allgemeinen willkürlich. Denn in ihnen können frei wählbare Funktionen, wie die Funktionen  $F_1$  im Counterterm (5.44), auftreten.

Man betrachtet nun eine von der renormierten  $\phi^4$ -Theorie, in der im Wirkungsfunktional  $\mathcal{L}$  durch  $\mathcal{L}^{ren}$  ersetzt worden ist, erzeugte n-Punkt-Funktion:

$$\tilde{\Gamma}_{0,n}(p_1, \dots, p_n, \lambda_0, m_0, \varepsilon). \tag{5.51}$$

Wenn man  $\phi_0$ ,  $m_0$ ,  $\lambda_0$ , motiviert durch die Gleichungen (5.50), als Funktionen von  $\lambda$ ,  $m$ ,  $\mu$  und  $\varepsilon$  auffasst und berücksichtigt, dass im Pfadintegral (5.29) die Felder  $\phi$  durch  $\phi_0$  ersetzt wurden sind (s. Gl. (5.50)) so gilt (s. z.B. [Col] Kap. 4.5):

$$\tilde{\Gamma}_{0,n}(p_1, \dots, p_n, \lambda_0, m_0, \varepsilon) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \tilde{\Gamma}_n(p_1, \dots, p_n, \lambda, m, \mu, \varepsilon). \tag{5.52}$$

$\tilde{\Gamma}_n$  ist dabei für  $\varepsilon \rightarrow 0$  endlich. Die rechte Seite von Gleichung (5.52) kann aber auch so interpretiert werden, dass die Parameter  $\lambda$ ,  $m$ ,  $\mu$  von den nackten Parametern  $\lambda_0$ ,  $m_0$  abhängige Größen sind.

Die linke Seite von der Gleichung (5.52) hängt nicht von  $\mu$  ab; somit ergibt sich durch Anwenden von  $\mu \frac{d}{d\mu}$  auf (5.52):

$$\left( \mu \partial_\mu + \beta(\lambda, m, \mu, \varepsilon) \partial_\lambda + \gamma_m(\lambda, m, \mu, \varepsilon) \partial_m - \frac{n}{2} \gamma_d(\lambda, m, \mu, \varepsilon) \right) \tilde{\Gamma}_n = 0, \tag{5.53}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda, m, \mu, \varepsilon) &:= \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \\
\gamma_d(\lambda, m, \mu, \varepsilon) &:= \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\phi^2}{\partial \mu}, \\
\gamma_m(\lambda, m, \mu, \varepsilon) &:= \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Diese partielle Differentialgleichung wird als *Renormierungsgruppengleichung* bezeichnet, des Weiteren wird der Name Renormierungsgruppengleichungen auch für die Gleichungen (5.54) verwendet. Die Funktionen  $\beta$ ,  $\gamma_d$ ,  $\gamma_m$  sind darüber hinaus für  $\varepsilon \rightarrow 0$  analytisch (s. [Ram] Kap. 4.5).

## Die $\beta$ -Funktion

In diesem Abschnitt soll es um die Interpretation der Koeffizienten der Renormierungsgruppengleichung (5.53) und den Koeffizienten  $\beta$  so wie dessen Bestimmung gehen.

Um eine physikalische Interpretation der  $\beta$ -Funktion

$$\beta = \beta(\lambda, m, \mu, \varepsilon)$$

gewinnen, wird eine so genannte *massenlose*  $\phi^4$ -Theorie betrachtet. Dies bedeutet nichts weiter, als das der Parameter  $m$  im Funktional (5.28) Null gesetzt wird. Dabei soll auf das Problem, dass dann die Integrale in der  $n$ -Punkt-Funktion  $\tilde{\Gamma}_n$  (s. z.B. (5.34)) bei  $p = 0$  divergieren, nicht weiter eingegangen werden, da es hier nur darum gehen soll das Prinzip der folgenden Konstruktionen zu verdeutlichen. Man kann die Divergenzen beispielsweise vermeiden, wenn man die Integrale in (5.34) nur bis zu einer unteren Schranke  $\delta > 0$  für  $|p|$  ausführt. Es soll darüber hinaus erwähnt werden, dass sich die folgenden Untersuchungen auch für den Fall  $m \neq 0$  mit entsprechendem Aufwand durchführen lassen. Für den euklidischen Fall siehe z.B. [Dr,Itz].

Betrachtet man die physikalische Dimension der  $n$ -Punkt-Funktion, so erhält man (s. z.B. [Dr,Itz]) für  $d$  Raum-Dimensionen:

$$[\tilde{\Gamma}_n] = \text{Masse}^{d+n(1-\frac{d}{2})}. \quad (5.55)$$

Wenn man den Parameter der dimensionalen Regularisierung  $\varepsilon = 4 - d$  einführt, so lässt sich der Exponent von (5.55) wie folgt ausdrücken:

$$d + n \left(1 - \frac{d}{2}\right) = 4 - n - \varepsilon \left(1 - \frac{n}{2}\right). \quad (5.56)$$

Man kann nun von der  $n$ -Punkt-Funktion einen dimensionsbehafteten Faktor abspalten:

$$\tilde{\Gamma}_n(p_i, \lambda, \mu, \varepsilon) = \mu^{4-n-\varepsilon(1-\frac{n}{2})} \bar{\Gamma}_n\left(\frac{p_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right), \quad (5.57)$$

wobei  $\bar{\Gamma}_n$  dimensionslos ist und alle Größen mit Massen-Dimension durch die, bei der dimensionalen Regularisierung eingeführte, Skala  $\mu$  skaliert werden. Man erhält dann mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung:

$$\begin{aligned} [\beta(\lambda)\partial_\lambda + \mu\partial_\mu - \tilde{\gamma}] \bar{\Gamma}\left(\frac{p_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) &= 0, \\ \tilde{\gamma} &:= \frac{n}{2}\gamma_d - \left(4 - n - \varepsilon\left(1 - \frac{n}{2}\right)\right); \end{aligned} \quad (5.58)$$

der Term  $\gamma_m$  fällt weg, da  $m = 0$  angenommen wird.

Als Nächstes führt man eine Substitution für die Variablen  $p_i$  durch:

$$p_i \rightarrow wp_i. \quad (5.59)$$

Hier ist  $w$  ein positiver, reeler Parameter, der als eine Skalierung der Variablen  $p_i$  aufgefasst werden kann. Mit dieser Substitution erhält man durch einfaches Nachrechnen:

$$(w\partial_w + \mu\partial_\mu) \bar{\Gamma}_n\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) = 0. \quad (5.60)$$

Mit Hilfe von Gleichung (5.58) lässt sich der Term mit  $\mu\partial_\mu$  eliminieren, und man erhält:

$$(\beta(\lambda)\partial_\lambda - w\partial_w - \tilde{\gamma})\bar{\Gamma}\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) = 0. \quad (5.61)$$

Für diese Gleichung macht man folgenden Ansatz:

$$\bar{\Gamma}_n\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) = e^{\int_{\lambda_0}^\lambda d\lambda' \frac{\tilde{\gamma}(\lambda')}{\beta(\lambda')}} f\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right). \quad (5.62)$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (5.61):

$$(\beta(\lambda)\partial_\lambda - w\partial_w) f\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \mu\right) = 0. \quad (5.63)$$

Schreibt man für  $f$

$$f\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda\right) = F\left(\frac{p_i}{\mu}, \int_{\lambda_0}^\lambda \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} + \ln w\right) \quad (5.64)$$

und führt eine Variablentransformation durch:

$$t = \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}, \quad \text{wobei } t := \ln w. \quad (5.65)$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) &= F\left(\frac{p_i}{\mu}, \left(\int_{\lambda_0}^\lambda + \int_\lambda^{\bar{\lambda}}\right) \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}\right) \\ &= F\left(\frac{p_i}{\mu}, \int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}\right). \\ &= f\left(\frac{p_i}{\mu}, \bar{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_n\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda, \varepsilon\right) &= e^{\int_{\lambda_0}^\lambda d\lambda' \frac{\tilde{\gamma}(\lambda')}{\beta(\lambda')}} f\left(\frac{wp_i}{\mu}, \lambda\right) \\ &= e^{(\int_{\lambda_0}^\lambda - \int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}}) d\lambda' \frac{\tilde{\gamma}(\lambda')}{\beta(\lambda')}} \bar{\Gamma}_n\left(\frac{p_i}{\mu}, \bar{\lambda}\right) \\ &= e^{\int_{\bar{\lambda}}^\lambda d\lambda' \frac{\tilde{\gamma}(\lambda')}{\beta(\lambda')}} \bar{\Gamma}_n\left(\frac{p_i}{\mu}, \bar{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Daraus folgt:

$$\tilde{\Gamma}_n(wp_i, \lambda, \mu, \varepsilon) = e^{\int_{\bar{\lambda}}^\lambda d\lambda' \frac{\tilde{\gamma}(\lambda')}{\beta(\lambda')}} \tilde{\Gamma}_n(p_i, \bar{\lambda}, \mu). \quad (5.68)$$

Darüber hinaus erhält man:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dt} \int_\lambda^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = \frac{1}{\beta(\bar{\lambda})} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta(\bar{\lambda}) \quad \text{mit } \bar{\lambda}(0) = \lambda. \end{aligned} \quad (5.69)$$



Die Gleichungen (5.68) und (5.69) lassen sich auf folgende Weise interpretieren:

(5.68) gibt an, wie sich die n-Punkt-Funktionen ändern, wenn man die Variablen  $p_i$  ändert. Diese Abhängigkeit lässt sich mit Hilfe des von der Skalierung  $w$  abhängigen Parameters  $\bar{\lambda}(t)$  mit  $\ln(t) = w$  beschreiben. Physikalisch kann man diesen Sachverhalt so interpretieren: Bei einem Streuprozess werden die Impulse der beteiligten Teilchen durch die Variablen  $p_i$  beschrieben. Die Impulse der Teilchen bestimmen aber deren Energie, so dass man eine Änderung der Skalierung  $w$  in (5.68) auch als eine Änderung der Energie betrachten kann, bei der der betrachtete Prozess abläuft. Der Parameter  $\lambda$  beschreibt physikalisch gesehen die Stärke der Wechselwirkungen bzw. der *Kopplungen* der Teilchen untereinander. Die Gleichung (5.69) besagt nun, dass  $\lambda$  eine von der Skala  $t$  bzw.  $w$  abhängige Funktion ist, die einer Differentialgleichung genügt, die durch die  $\beta$ -Funktion aus (5.54) gegeben ist. Da aber  $w$  die Energie skaliert, bedeutet die  $t$ -Abhängigkeit von  $\lambda$  nichts anderes, als dass die Kopplung energieabhängig wird.

Als nächstes soll skizziert werden, wie sich die  $\beta$ -Funktionen bestimmen lassen. Dies wird an Hand der  $\phi^4$ -Theorie erläutert:

Für den nicht renormierten Parameter  $\lambda_0$  lässt sich eine Laurent-Reihe in dem Parameter  $\varepsilon$  ansetzen:

$$\lambda_0 = \mu^{2\varepsilon} \left[ a_0(\lambda, m, \mu, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda, m, \mu)}{\varepsilon^k} \right]. \quad (5.70)$$

Die Koeffizientenfunktion  $a_0(\lambda, m, \mu, \varepsilon)$  ist hier analytisch in  $\varepsilon$ . Die Koeffizientenfunktionen  $a_i$  lassen sich nun mittels des Renormierungsverfahrens als eine Störungsreihe in  $\lambda$  bestimmen. So ergibt sich z.B. bis zur Ordnung  $\lambda^2$  (s. [Ram]):

$$\begin{aligned} a_0(\lambda, m, \mu, \varepsilon) &= \lambda + \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3), \\ a_1(\lambda, m, \mu) &= \frac{3}{32\pi^2} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Setzt man nun in Gleichung (5.70) ein, wendet  $\mu \partial_\mu$  an und berücksichtigt, dass die Funktionen  $a_0, a_1$  bis zur Ordnung  $\lambda^2$  (s. Gl. (5.71)) nicht explizit von  $m$  und  $\mu$  abhängen so wie  $\lambda_0$  nicht von  $\mu$  abhängt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varepsilon \left( a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\varepsilon^k} \right) + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \left( a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{\varepsilon^k} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \\ \Rightarrow \beta(\lambda) &= -2\varepsilon a_0 + 2 \frac{a_0 a'_1}{a_0'^2} - 2 \frac{a_1}{a'_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Dabei ist  $a'_k := \partial_\lambda a_k$ . Da  $\beta$  in  $\varepsilon$  analytisch ist, müssen die Terme  $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwinden, da  $\beta$  sonst für  $\varepsilon \rightarrow 0$  divergieren würde und somit nicht analytisch sein könnte. So ergibt sich:

$$\beta(\lambda) = 2 \frac{a_0 a'_1}{a_0'^2} - 2 \frac{a_1}{a'_0}. \quad (5.73)$$

Setzt man nun für  $a_0, a'_0, a_1$  und  $a'_1$  aus Gleichung (5.71) ein und entwickelt bis zur Ordnung  $\lambda^2$ , so ergibt sich für die  $\beta$ -Funktion (s. [Ram]):

$$\beta(\lambda) = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (5.74)$$

In diesem Zusammenhang sollte darauf hingewiesen werden, dass im Allgemeinen bei der Renormierung in den Gleichungen (wie (5.70)) für die nicht renormierten Kopplungen willkürliche Funktionen wie  $F_1$  aus dem vorangegangenen Abschnitt auftreten (s. hierzu auch [Ram]). Dass diese Funktionen in den Termen der  $\beta$ -Funktion von  $\lambda$  bis zur Ordnung  $\lambda^2$  nicht auftreten, ist ein glücklicher Umstand. Im Allgemeinen Fall ist es so, dass die  $\beta$ -Funktionen auch von diesen Funktionen abhängen, deren konkrete Form durch eine willkürlich gewählte *Renormierungsbedingung* festgelegt wird (Details s. [Ram]).

Auch sollte erwähnt werden, dass das Renormierungsverfahren für anders geartete Theorien wie z.B. Eichtheorien, wie sie im Standardmodell auftreten, wesentlich komplexer ist; hierzu sei auch auf die Literatur verwiesen [Ram], [Col].

## 5.2.2 Einfluss der Quanten-Korrekturen auf die Parameterbeziehungen im Dirac-Modell

Die Frage, die es als Nächstes zu untersuchen gilt, ist: Wie verhalten sich die Parameterbeziehungen (5.3), (5.4), beziehungsweise (5.10), (5.11) unter dem Einfluss von Quanten-Korrekturen?

Die Effekte von Quanten-Korrekturen sind, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, dass die auftretenden Kopplungen energieabhängig werden. Dabei wird das Änderungsverhalten der Kopplungen mit der Energie durch entsprechende  $\beta$ -Funktionen beschrieben. Die für die nachfolgenden Untersuchungen benutzten  $\beta$ -Funktionen wurden [Fo,Jo,St,Ei], [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch] entnommen. Sie wurden bis zur so genannten 1-Loop-Ordnung in der Top-Quark-Massen-Approximation nach dem  $\overline{MS}$ -Renormierungsschema bestimmt. Dabei bedeutet Top-Quark-Massen-Approximation, dass alle Massen, die kleiner als die Top-Quark-Masse sind, vernachlässigt werden. Weiter zeigt sich, dass die hier verwendeten  $\beta$ -Funktionen von dem hier verwendeten Renormierungsschema bis zur 1-Loop-Ordnung unabhängig sind (s. [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch]). Als Gleichungen für die Kopplungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{41}{96\pi^2} g_1^3 =: \beta_1(g_1) \\ \dot{g}_2 &= -\frac{19}{96\pi^2} g_2^3 =: \beta_2(g_2) \\ \dot{g}_3 &= -\frac{7}{16\pi^2} g_3^3 =: \beta(g_3) \end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_t &= \frac{1}{16\pi^2} \left( 9g_t^3 - \left( 8g_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{12}g_1^2 \right) g_t \right) \\ &=: \beta_t(g_1, g_2, g_3, g_t) \\ \dot{\lambda} &= \frac{1}{16\pi^2} \left( 96\lambda^2 + (24g_t^2 - 9g_2^2 - 3g_1^2) \lambda - 6g_t^4 + \frac{9}{32}g_2^4 + \frac{3}{32}g_1^4 + \frac{3}{16}g_1^2g_2^2 \right) \\ &=: \beta_\lambda(g_1, g_2, g_3, g_t, \lambda) \end{aligned} \tag{5.76}$$

Die in den Gleichungen (5.75) und (5.76) auftretenden Objekte  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $\lambda$  sind die gleichnamigen Parameter aus den Beziehungen (5.3), (5.4) bzw. (5.10),

(5.11).  $g_t$  ist für die beide diskutierten Modelle der größte Eigenwert der Yukawa-Kopplungs-Matrix  $g^u$ . Diese Parameter werden nun als Funktionen der Variablen  $t$  aufgefasst.  $\dot{\phantom{x}}$  bezeichne hier die Ableitung nach  $t$ . Man erhält somit ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung für  $g_1, g_2, g_3, \lambda$  und  $g_t$ . Für  $t$  gilt dabei weiter:

$$t := \ln \left( \frac{\Lambda}{E_0} \right).$$

$\Lambda$  ist hierbei eine beliebige Energieskala und  $E_0$  ein beliebiger Energiebezugspunkt, so dass sich der Anfangspunkt, der sich aus den Gleichungen ergebenden Anfangswertprobleme, auf 0 normieren lässt. Die Variable  $t$  entspricht in diesem Zusammenhang genau dem Skalenparameter aus dem vorangegangenen Abschnitt. Die Gleichungen (5.75), (5.76) beschreiben somit die Energieabhängigkeit der Parameter  $g_1, g_2, g_3, \lambda$  und  $g_t$ . Es sei noch darüber hinaus erwähnt, dass auch für den Parameter  $\mu^2$  eine entsprechende Gleichung existiert, die aber nicht unabhängig von gewählten Renormierungsverfahren ist und deshalb nicht weiter betrachtet wird (s. z.B. [Ca, Io, Ka, Sch]).

Physikalisch gesehen, beschreiben die Parameter  $g_1, g_2, g_3, \lambda$  und  $g_t$  die Stärke von bestimmten Arten von Wechselwirkungen bzw. die Stärke von Kopplungen der Teilchen aneinander. Die Kopplungen  $g_1, g_2, g_3$  beschreiben die so genannten Eich- oder Yang-Mills-Wechselwirkungen.  $\lambda$  bezieht sich auf die Selbstwechselwirkung des Higgs-Bosons, während  $g_t$  die Stärke der Yukawa-Kopplung des Top-Quarks beschreibt, die die Masse des Quarks erzeugt. Für Details zu den einzelnen Wechselwirkungstypen sei wieder auf die umfangreiche Literatur verwiesen (z.B. [Na]).

### 5.2.3 Stabilität und kritische Punkte

Eine Frage, die sich bei der Untersuchung von Quanteneinflüssen auf die Parameterbeziehungen stellt, ist die nach der Stabilität der Gleichungen (5.3), (5.4) unter den Änderungen der Kopplungen, wie sie durch die Gleichungen (5.75), (5.76) festgelegt werden. Anders ausgedrückt: An welchen Punkten  $t$  der Skala für die Kopplungen lassen sich die Modellparameter so wählen, dass die Gleichungen (5.3), (5.4) erfüllt sind? Hierfür ist es günstig, zunächst die Gleichungen für die Eichkopplungen  $g_1, g_2, g_3$  zu untersuchen.

Die Anfangswertprobleme für die Flussgleichungen für die Eichkopplungen (5.75) lassen sich explizit lösen, und für das Anfangswertproblem bei  $t = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{A_1 - \frac{41}{48\pi^2} t}} \\ g_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{A_2 + \frac{19}{48\pi^2} t}} \\ g_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{A_3 + \frac{7}{8\pi^2} t}} \end{aligned} \tag{5.78}$$

mit

$$A_i := \frac{1}{g_i^2(0)}, \quad i = 1, \dots, 3. \tag{5.79}$$

Setzt man dies in (5.3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} A_1 - \frac{41}{48\pi^2}t &= 2A \frac{3y_q + y_\ell x}{4+x} \\ A_2 + \frac{19}{48\pi^2}t &= A \frac{3+x}{4+x} \\ A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t &= 4A \frac{1}{4+x} \end{aligned} \quad (5.80)$$

mit

$$x := \operatorname{tr} \frac{X}{N}.$$

Es werden Skalenpunkte  $t$  und Werte für  $A$  und  $x$  gesucht, so dass die Gleichungen (5.80) erfüllt sind. Hier reicht es aus physikalischen Gründen sich auf den Fall mit

$$y_q = \frac{11}{18}, \quad y_\ell = \frac{3}{2}$$

zu beschränken, da sich diese Werte aus den Werten für die physikalischen Hyperladungen (s. Gl. (5.19), (5.20)) ergeben. Man erhält damit folgendes Lemma:

**Lemma 5.1.** *Das Gleichungssystem (5.80) ist für fest gewählte Parameter  $A_1, A_2, A_3 > 0$  und  $y_q = \frac{11}{18}, y_\ell = \frac{3}{2}$  eindeutig lösbar in  $x, t, A$ , wenn  $3A_1 - 9A_2 + 4A_3 \neq 0$  gilt. Für die Lösung  $x_c, t_c, A_c$  gilt dann:*

$$\begin{aligned} x_c &= -\frac{1}{21} \frac{75A_1 - 477A_2 + 289A_3}{3A_1 - 9A_2 + 7A_3} \\ A_c &= \frac{1}{252} (177A_1 - 279A_2 + 299A_3) \\ t_c &= \frac{8\pi^2}{21} (3A_1 - 9A_2 + 4A_3). \end{aligned} \quad (5.83)$$

**Beweis:**

Mit Hilfe von Gleichung (5.78) lässt die sich dritte Gleichung von (5.80) wie folgt umformen:

$$\frac{1}{4} \frac{1}{g_3^2} = \frac{A}{4+x_c}.$$

Setzt man dies in die anderen beiden Gleichungen von (5.80) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{3}{4} \left( \frac{11}{9} + x_c \right) \frac{1}{g_3^2}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{4} \left( 3 + x_c \right) \frac{1}{g_3^2} \\ \iff x_c &= 4 \frac{g_3^2}{g_2^2} - 3 \\ \implies 0 &= \frac{1}{g_1^2} - 3 \frac{1}{g_2^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{g_3^2}. \end{aligned}$$

Wenn man nun für  $g_1, g_2, g_3$  einsetzt und nach  $t_c$  auflöst, so ergibt sich:

$$t_c = \frac{8}{7} \pi^2 \left( A_1 - 3A_2 + \frac{4}{3} A_3 \right).$$

Wird nun der explizite Ausdruck für  $t_c$  in die Gleichung für  $x$  eingesetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{4(A_2 + \frac{19}{6\pi^2} \frac{\pi^2}{7} (A_1 - 3A_2 + \frac{3}{4})) - 3(A_3 + A_1 - 3A_2 + \frac{3}{4}A_3)}{A_3 + A_1 - 3A_2 + \frac{3}{4}A_3} \\ &= \frac{-\frac{25}{21}A_1 + \frac{53}{7}A_2 - \frac{289}{63}A_3}{A_1 - 3A_2 + \frac{7}{3}A_3}. \end{aligned}$$

Schließlich hat man für  $A$  die Beziehung:

$$A_c = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{g_3^2} + 4 \frac{1}{g_2^2} \right).$$

Beim Einsetzen von  $g_3$  und  $g_2$  und nach entsprechenden Umformungen findet man:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{1}{4} \left( A_3 + A_1 - 3A_2 + \frac{4}{3}A_3 + 4 \left( A_2 + \frac{19}{6\pi^2} \frac{\pi^2}{7} \left( A_1 - 3A_2 + \frac{4}{3}A_3 \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{59}{21}A_1 - \frac{31}{7}A_2 + \frac{299}{63}A_3 \right). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Die Eineindeutigkeit der Lösung hat zur Folge, dass es bei festen Anfangsbedingungen  $A_1, A_2, A_3$ , die durch die experimentellen Werte der Eichkopplungen gegeben sind, genau eine kritische Stelle  $t_c$  auf der Skala gibt, an der die Gleichungen (5.3) erfüllt sind. Insbesondere kann es keinen weiteren Skalenpunkt  $t'_c \neq t_c$  geben, an dem sich das Gleichungssystem (5.80) lösen läßt, da  $t_c$  nur von  $A_1, A_2, A_3$  abhängt. Womit sich die Frage der Stabilität der Parameterbeziehungen bei Berücksichtigung von Quanten-Effekten eindeutig mit Nein beantworten läßt, da die Parameterbeziehungen an jeden Skalenpunkt  $t \neq t_c$  nicht mehr erfüllt sind. Die Parameterbeziehungen (5.4) lassen sich nur am Skalenpunkt  $t_c$  erfüllen, da die Parameter  $B, C$  frei wählbar sind.

Macht man nun die gleiche Untersuchung für die Parameterbeziehungen des Standardmodells mit rechtshändigen Neutrinos, so kommt man für den Fall  $y_q = \frac{11}{18}$  und  $y_\ell = \frac{3}{2}$  zu folgendem Ergebnis:

**Lemma 5.2.** *Sei  $3A_1 - 9A_2 + 4A_3 \neq 0$ , dann existieren eindeutige von  $A_1, A_2, A_3$  abhängige Zahlen  $t_c, A'_c, x_c \in \mathbb{R}$  mit*

$$\begin{aligned} x_c &= -\frac{1}{21} \frac{75A_1 - 477A_2 + 289A_3}{3A_1 - 9A_2 + 7A_3}, \\ A_c &= \frac{1}{126} (57A_1 - 45A_2 + 76A_3), \\ t_c &= \frac{8\pi^2}{21} (3A_1 - 9A_2 + 4A_3), \end{aligned} \tag{5.84}$$

so dass die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen erfüllt sind. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_1^2(t_c)} &= A_1 - \frac{41}{48\pi^2}t_c = 3A_c \frac{\frac{11}{9} + x_c}{3 + x_c}, \\ \frac{1}{g_2^2(t_c)} &= A_2 + \frac{19}{48\pi^2}t_c = A_c, \\ \frac{1}{g_3^2(t_c)} &= A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t_c = \frac{4A_c}{3 + x_c}.\end{aligned}\tag{5.85}$$

**Beweis:** Das behauptete Ergebnis ergibt sich wie folgt:

Teilt man die ersten beiden Gleichungen von (5.85) durch die dritte, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{g_3^2}{g_1^2} &= \frac{11}{12} + \frac{3}{4}x_c \\ \frac{g_3^2}{g_2^2} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_c.\end{aligned}$$

Addiert man nun die beiden Gleichungen und löst nach  $x_c$  auf, so erhält man:

$$x_c = \frac{g_3^2}{g_1^2} + \frac{g_3^2}{g_2^2} - \frac{5}{3}.$$

Setzt man nun in die Gleichung für  $\frac{g_3^2}{g_2^2}$  ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= 3\frac{g_3^2}{g_2^2} - \frac{g_3^2}{g_1^2} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} &= \frac{-A_1 + 3A_2 + \frac{49}{24\pi^2}t_c}{A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t_c} \\ \Leftrightarrow t_c &= \frac{8\pi^2}{21}(3A_1 - 9A_2 + 4A_3),\end{aligned}$$

was das erste behauptete Ergebnis ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}x_c &= 4\frac{g_3^2}{g_2^2} - 3 \\ \Leftrightarrow x_c &= \frac{4A_2 - 3A_3 - \frac{25}{24\pi^2}t_c}{A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t_c} \\ \Leftrightarrow x_c &= -\frac{1}{21} \frac{75A_1 - 477A_2 + 289A_3}{3A_1 - 9A_2 + 7A_3}.\end{aligned}$$

Dies ist das zweite behauptete Ergebnis. Setzt man nun  $t_c$  in die zweite Gleichung von (5.85) ein, so erhält man direkt:

$$A_c = \frac{19}{42}A_1 - \frac{5}{14}A_2 + \frac{38}{63}A_3.$$

Bringt man diesen Ausdruck auf den Hauptnenner, so erhält man das dritte behauptete Resultat.  $\square$

Man bemerkt, dass der kritische Skalenpunkt  $t_c$  und  $x_c$  für das Standardmodell mit und ohne rechtshändige Neutrinos identisch ist. Was die Stabilität der Parameterbeziehungen bei Quanteneinflüssen angeht, so gilt das Gleiche wie für das Modell ohne rechtshändige Neutrinos.

### 5.3 Eigenschaften der Renormierungsgruppenflussgleichungen

Im diesem Abschnitt soll der Einfluss von Fehlerquellen auf die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{g}_t &= \beta_t(g_1, g_2, g_3, g_t), \\ \dot{\lambda} &= \beta_\lambda(g_1, g_2, g_3, g_t, \lambda)\end{aligned}\tag{5.86}$$

untersucht werden. Die Funktionen  $\beta_t$  und  $\beta_\lambda$  sind dabei durch die Gleichungen (5.76) gegeben.  $g_1, g_2, g_3$  werden durch die Gleichungen (5.78) definiert. Dabei soll das betrachtete Problem ein Randwertproblem der folgenden Art sein:

Seien ein Anfangswert für  $g_t$

$$g_t(0) =: g_{0,t}\tag{5.87}$$

und ein Randwert für  $\lambda$  an einer Stelle  $t_c > 0$

$$\lambda(t_c) = f(g_t(t_c))\tag{5.88}$$

gegeben, wobei  $f$  eine positive, homogene, quadratische Funktion von  $g_t$  ist. Es soll nun der Einfluß der folgenden Fehlerquellen auf die Lösungen von (5.86) untersucht werden:

- Fehler im Anfangswert  $g_t(0)$ ,
- Fehler in den in  $\beta_t$  und  $\beta_\lambda$  auftretenden Funktionen  $g_1, g_2, g_3$ . Sie hängen nach den Gleichungen (5.78) explizit von den fehlerbehafteten Werten  $A_i$  ab.
- Fehler in der Stelle  $t_c$ .  $t_c$  ist der kritische Skalenpunkt aus den Lemmata 5.1 und 5.85 und dieser ist nur mit endlicher Genauigkeit bekannt.
- Fehler in  $\lambda(t_c)$ , bedingt durch die Fehler, die in  $g_t$  auftreten.

Ziel der nun folgenden Untersuchungen soll sein, Unter- und Ober-Funktionen für  $g_t$  und  $\lambda$  zu finden, die den Einfluß dieser Fehler nach unten bzw. oben abschätzen.

Dafür ist es zunächst einmal bequem, die folgenden Definitionen einzuführen.

**Definition 5.1.**

$$g_{0,i} := g_i(0), \quad i = 1, \dots, 3\tag{5.89}$$

$$\Delta A_i := 2 \frac{\Delta g_i}{g_{i,0}^3}, \quad i = 1, \dots, 3.\tag{5.90}$$

$\Delta g_i$  ist der Fehler zu  $g_{0,i}$ . Ferner sei angenommen, dass  $\Delta g_i \ll 1$  gilt, so dass  $\Delta A_i$  den linearen Teil des Fehlers von  $A_i$  in  $\Delta g_i$  darstellt.

**Definition 5.2.**

$$\underline{g}_1(t) := \frac{1}{\sqrt{A_1 + \Delta A_1 - \frac{41}{48\pi^2} t}}, \quad (5.91)$$

$$\overline{g}_1(t) := \frac{1}{\sqrt{A_1 - \Delta A_1 - \frac{41}{48\pi^2} t}}, \quad (5.92)$$

$$\underline{g}_2(t) := \frac{1}{\sqrt{A_2 + \Delta A_2 + \frac{19}{48\pi^2} t}}, \quad (5.93)$$

$$\overline{g}_2(t) := \frac{1}{\sqrt{A_2 - \Delta A_2 + \frac{19}{48\pi^2} t}}, \quad (5.94)$$

$$\underline{g}_3(t) := \frac{1}{\sqrt{A_3 + \Delta A_3 + \frac{8}{7\pi^2} t}}, \quad (5.95)$$

$$\overline{g}_3(t) := \frac{1}{\sqrt{A_3 - \Delta A_3 + \frac{8}{7\pi^2} t}}, \quad (5.96)$$

**Definition 5.3.**

$$D := \left[ 0, \frac{48\pi^2}{41} (A_1 - \Delta A_1) \right).$$

Damit ergibt sich sofort, dass alle  $g_i, \underline{g}_i, \overline{g}_i$  für  $i = 1, 2, 3$  auf  $D$  definiert sind.

Sicher sind ist nach Definition 5.2  $\underline{g}_i$  bzw.  $\overline{g}_i$ , Unter- bzw. Ober-Funktion von  $g_i$  für  $i = 1, 2, 3$ .

Für die Untersuchung der Fehlereinflüsse ist es hilfreich auszunutzen, dass das Differentialgleichungssystem (5.86) stufenweise entkoppelt, was heißen soll, dass die Gleichung für  $g_t$  nicht von  $\lambda$  abhängt. Man kann also die Gleichung für  $g_t$  zunächst auch für sich allein untersuchen.

Man definiert nun:

**Definition 5.4.**

$$\underline{\beta}_t := \frac{1}{16\pi^2} (9g_t^3 - (8\overline{g}_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{12}\overline{g}_1^2)g_t), \quad (5.97)$$

$$\overline{\beta}_t := \frac{1}{16\pi^2} (9g_t^3 - (8\underline{g}_3^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{17}{12}\underline{g}_1^2)g_t). \quad (5.98)$$

Da nach den Gleichungen (5.78) die  $g_i$   $i = 1, \dots, 3$  Funktionen von  $t$  sind, sind  $\underline{\beta}_t, \beta_t, \overline{\beta}_t$  Funktionen von  $g_t, t$ . Somit gilt:

$\forall t \in D, g_t \in \mathbb{R} : \underline{\beta}_t(g_t, t) \leq \beta_t(g_t, t) \leq \overline{\beta}_t(g_t, t)$ . Seien nun  $g_{t0}$  der experimentelle Wert für die Top-Yukawa-Kopplung am Skalen-Punkt  $t = 0$  und  $\Delta g_t$  der zugehörige Meßfehler. Dann sei:

**Definition 5.5.**

$$\underline{g}_t \quad \text{Lsg. d. AWP} \quad \dot{g}_t = \underline{\beta}_t \quad \text{mit} \quad g_t(0) = g_{t0} - \Delta g_t, \quad (5.99)$$

$$g_t \quad \text{Lsg. d. AWP} \quad \dot{g}_t = \beta_t \quad \text{mit} \quad g_t(0) = g_{t0}, \quad (5.100)$$

$$\overline{g}_t \quad \text{Lsg. d. AWP} \quad \dot{g}_t = \overline{\beta}_t \quad \text{mit} \quad g_t(0) = g_{t0} + \Delta g_t. \quad (5.101)$$

Mit dem Satz von Picard-Lindelöf (s. z.B. [Heu] Kap. II) folgt:  $\underline{g}_t, g_t, \overline{g}_t$  existieren auf allen kompakten Teil-Intervallen  $\tilde{D}$  von  $D$  und sind eindeutig bestimmt.

Man erhält dann folgendes Lemma:

**Lemma 5.3.** *Sei  $\tilde{D}$  ein kompaktes Teil-Intervall von  $D$ , dann gilt:*

$$\forall t \in \tilde{D} \quad \underline{g}_t(t) \leq g_t(t) \leq \overline{g}_t(t). \quad (5.102)$$



**Beweis:** Dies ist ein Korollar aus den Sätzen C.1 und C.2 des Anhangs.  $\square$

Man hat somit wohldefinierte Anfangswertprobleme gefunden, die Funktionen als Lösungen besitzen, die den Einfluss der beschriebenen Fehler auf  $g_t$  nach oben bzw. nach unten abschätzen.

Um den Einfluß der angegebenen Fehler auf  $\lambda$  abzuschätzen, denke man sich die Funktion  $g_t$  als bekannt. In der Tat lässt sich  $g_t$  zumindest numerisch unabhängig von  $\lambda$  berechnen.

Sei nun

**Definition 5.6.**

$$T_c := [t_c - \Delta t_c, t_c + \Delta t_c], \quad (5.103)$$

dabei ist  $t_c$  durch Gleichung (5.83) definiert, und es gilt:

$$\Delta t_c := \frac{8\pi^2}{21}(3\Delta A_1 + 9\Delta A_2 + 4\Delta A_3). \quad (5.104)$$

Im Folgenden wird  $T_c$  auch als kritisches Intervall bezeichnet.

Im Folgenden sei angenommen, dass  $T_c \subset D$  ist. Diese Annahme stellt sicher, dass das Intervall  $T_c$  auch im Definitionsbereich der auftretenden Funktionen  $\underline{g}_i$ ,  $g_i$ ,  $\bar{g}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  liegt. Es wird sich herausstellen, dass diese Annahme für den später betrachteten Fall erfüllt ist. Dann stellt sich der zu untersuchende Gegenstand als ein Anfangswertproblem der folgenden Form dar:

$$\dot{\lambda} = \beta_\lambda(g_1, \dots, g_3, g_t, \lambda), \quad \lambda(t^*) = f(g_t(t^*)), \quad t^* \in T_c,$$

wobei  $f$  eine homogene, positive quadratische Funktion ist. Im Prinzip lassen sich die Unter- und Ober-Funktionen zu  $\lambda$  auf analoge Weise wie die Unter- und Ober-Funktionen von  $g_t$  als Lösungen von Anfangswertproblemen formulieren. Nur ist hier nicht klar, welcher Anfangs-Punkt  $t^* \in T_c$  zu nehmen ist.

Die Idee zur Lösung dieses Problems ist nun die, dass man auf dem Intervall  $T_c$  die Stellen  $\underline{t}$ ,  $\bar{t}$  bestimmt, die folgendermaßen definiert sind:

**Definition 5.7.** Seien  $\underline{t}, \bar{t} \in T_c$ , so dass gilt:

$$(f \circ \underline{g}_t)(\underline{t}) = \min_{T_c} f \circ \underline{g}_t, \quad (5.105)$$

$$(f \circ \bar{g}_t)(\bar{t}) = \max_{T_c} f \circ \bar{g}_t. \quad (5.106)$$

Diese Stellen liefern Anfangswerte für die Unter- und Ober-Funktionen  $\underline{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda}$  von  $\lambda$ .

Zur Bestimmung der Extremstellen von  $\underline{g}_t$ ,  $\bar{g}_t$  auf  $T_c$  sind die folgenden beiden Lemmata hilfreich:

**Lemma 5.4.** Die Funktionen  $\underline{g}_t, g_t, \bar{g}_t$  sind auf dem kritischen Intervall  $T_c \subset D$  monoton fallend, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \exists c &\geq \bar{g}_t(t_c - \Delta t_c), g_t(t_c - \Delta t_c), \underline{g}_t(t_c - \Delta t_c), \\ c &\leq \frac{1}{3}\sqrt{\alpha}, \\ \alpha &\geq 1, \end{aligned} \quad (5.107)$$

wobei

$$\alpha := 8\underline{g}_3^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{9}{4}\underline{g}_2^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{17}{12}\underline{g}_1^2(t_c - \Delta t_c). \quad (5.108)$$

**Beweis:** Die Funktionen  $\underline{g}_t, g_t, \overline{g}_t$  sind auf  $T_c$  monoton fallend, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{g}}_t(t), \dot{g}_t(t), \dot{\overline{g}}_t(t) &\leq 0 \quad \forall t \in T_c, \\ \Leftrightarrow \underline{\beta}_t(t, \underline{g}_t(t)), \beta_t(t, g_t(t)), \overline{\beta}_t(t, \overline{g}_t(t)) &\leq 0, \quad \forall t \in T_c \quad (*) \end{aligned}$$

Seien nun:

$$\begin{aligned} \underline{f}(t) &:= 8\underline{g}_3^2(t) + \frac{9}{4}\underline{g}_2^2(t) + \frac{17}{12}\underline{g}_1^2(t), \\ f(t) &:= 8g_3^2(t) + \frac{9}{4}g_2^2(t) + \frac{17}{12}g_1^2(t), \\ \overline{f}(t) &:= 8\overline{g}_3^2(t) + \frac{9}{4}\overline{g}_2^2(t) + \frac{17}{12}\overline{g}_1^2(t). \end{aligned}$$

Dann ist die Bedingung (\*) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \underline{g}_t(t) &\leq \sqrt{\frac{1}{9}\underline{f}(t)}, \\ g_t(t) &\leq \sqrt{\frac{1}{9}f(t)}, \\ \overline{g}_t(t) &\leq \sqrt{\frac{1}{9}\overline{f}(t)}, \quad \forall t \in T_c. \quad (**) \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der Definition von  $\underline{\beta}_t, \beta_t, \overline{\beta}_t$ . Es gilt weiter aufgrund der Definition:

$$\forall t \in T_c \quad \alpha \leq \underline{f}(t), f(t), \overline{f}(t).$$

Dies ergibt sich aus den Monotonieeigenschaften von  $\underline{g}_i, g_i, \overline{g}_i$  für  $i = 1, 2, 3$  auf  $T_c$ . Damit gilt dann:

$$\forall g \geq 0, t \in T_c \quad \frac{1}{16\pi^2}(9g^3 - \alpha g) := \tilde{\beta}_t(t, g) \geq \underline{\beta}_t(t, g), \beta_t(t, g), \overline{\beta}_t(t, g).$$

Dann ist

$$\tilde{g}_t(t) := \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{c^2} - 1\right)e^{\frac{\alpha}{8\pi^2}(t-t_c+\Delta t_c)}}$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{g}}_t(t) = \tilde{\beta}_t(t, \tilde{g}_t(t)), \quad \tilde{g}_t(t_c - \Delta t_c) = c.$$

Da

$$\dot{\tilde{g}}_t(t) = -\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{16\pi^2} \frac{\left(\frac{\alpha}{c^2} - 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{c^2} - 1\right)e^{\frac{\alpha}{8\pi^2}(t-t_c+\Delta t_c)}}\right)^3} e^{\frac{\alpha}{8\pi^2}(t-t_c+\Delta t_c)} \leq 0,$$

gilt damit:  $\forall t \in T_c : \dot{\tilde{g}}_t(t) \leq 0$ , woraus folgt:  $\forall t \in T_c \quad c \leq \tilde{g}_t(t)$ . Des Weiteren gilt nach den Satz (C.2):

$$\forall t \in T_c \quad \tilde{g}_t(t) \geq \overline{g}_t(t), g_t(t), \underline{g}_t(t).$$

Damit gilt dann:

$$\forall t \in T_c \quad \underline{g}_t(t), g_t(t), \overline{g}_t(t) \leq \tilde{g}_t(t) \leq c \leq \frac{1}{3}\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\frac{1}{9}\underline{f}(t)}, \sqrt{\frac{1}{9}f(t)}, \sqrt{\frac{1}{9}\overline{f}(t)},$$

was nach (\*\*) die Behauptung beweist.  $\square$

**Lemma 5.5.** Die Funktionen  $\underline{g}_t, g_t, \overline{g}_t$  sind auf dem kritischen Intervall  $T_c$  positiv, wenn gilt:

$$\exists b: \quad 0 < b \leq \underline{g}_t(t_c + \Delta t_c), g_t(t_c + \Delta t_c), \overline{g}_t(t_c + \Delta t_c), \sqrt{\beta}, \quad (5.109)$$

wobei  $0 < \beta \leq 8\pi^2$  mit

$$\beta := 8\overline{g}_3^2(t_c - \Delta t_c) + \frac{9}{4}\overline{g}_2^2(t_c - \Delta t_c) + \frac{17}{12}\overline{g}_1^2(t_c + \Delta t_c). \quad (5.110)$$

**Beweis:** Sei

$$\underset{\sim}{\beta}_t(t, g) := \frac{1}{16\pi^2}(9g^3 - \beta g).$$

Dann gilt:

$$\forall t \in T_c \quad \beta_t(t, g) \leq \underline{\beta}_t(t, g), \beta_t(t, g), \overline{\beta}_t(t, g).$$

Es gilt weiter:

$$0 < b \leq \underline{g}_t(t_c + \Delta t_c), g_t(t_c + \Delta t_c), \overline{g}_t(t_c + \Delta t_c).$$

Dann ist

$$\underset{\sim}{g}_t(t) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{b^2} - 1\right)e^{\frac{\beta}{8\pi^2}(t-t_c-\Delta t_c)}}$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\underset{\sim}{g}'(t) = \underset{\sim}{\beta}_t(t, g(t)), \quad g(t_c + \Delta t_c) = b.$$

Weiter gilt:  $\underset{\sim}{g}_t(t) > 0 \forall t \in T_c$ . Des Weiteren gilt nach C.2:

$$\forall t \in T_c \quad \underset{\sim}{g}_t(t) \leq \underline{g}_t(t), g_t(t), \overline{g}_t(t),$$

woraus sich die Behauptung ergibt.  $\square$ .

Die Lemmata 5.4 und 5.5 geben Bedingungen an, unter denen  $\underline{g}_t, g_t, \overline{g}_t$  auf  $T_c$  monoton fallend und positiv sind. Es zeigt sich, dass diese Bedingungen für die später diskutierten Fälle erfüllt sind. Somit ist das Auffinden der Extremstellen sehr einfach, wenn  $f$  eine positive, homogene, quadratische Funktion ist. Sie liegen an den Rändern von  $T_c$ .

Für die Konstruktion der Unter- und Ober-Funktionen von  $\lambda$  definiert man nun:

**Definition 5.8.**

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_\lambda &:= \frac{1}{16\pi^2}(96\lambda^2 + (24\underline{g}_t^2 - 9\overline{g}_2^2 - 3\overline{g}_1^2)\lambda \\ &\quad - 6\overline{g}_t^4 + \frac{9}{32}\underline{g}_2^4 + \frac{3}{32}\underline{g}_1^4 + \frac{3}{16}\underline{g}_2^2\underline{g}_1^2), \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_\lambda &:= \frac{1}{16\pi^2}(96\lambda^2 + (24\overline{g}_t^2 - 9\underline{g}_2^2 - 3\underline{g}_1^2)\lambda \\ &\quad - 6\underline{g}_t^2 + \frac{9}{32}\overline{g}_2^4 + \frac{3}{32}\overline{g}_1^4 + \frac{3}{16}\overline{g}_2^2\overline{g}_1^2). \end{aligned} \quad (5.112)$$

**Definition 5.9.** *Seien*

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} & \text{ Lsg. des AWP } \dot{\underline{\lambda}} = \overline{\beta_{\underline{\lambda}}} \quad \text{mit } \underline{\lambda}(t) = f(\underline{g}_t(t)), \\ \lambda & \text{ Lsg. des AWP } \dot{\lambda} = \beta_{\lambda} \quad \text{mit } \lambda(t_c) = f(g_t(t_c)), \\ \overline{\lambda} & \text{ Lsg. des AWP } \dot{\overline{\lambda}} = \underline{\beta_{\overline{\lambda}}} \quad \text{mit } \overline{\lambda}(\bar{t}) = f(\overline{g}_{\bar{t}}(\bar{t})). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Man beachte, dass hier die Definition der Unter- und Oberfunktionen  $\underline{\lambda}$ ,  $\overline{\lambda}$  mit Hilfe der  $\beta$ -Funktion in umgekehrter Weise erfolgt wie bei  $g_t$ . Dies liegt daran, dass die Integration der Differentialgleichungen in negative  $t$ -Richtung erfolgt.

Um analoge Aussagen über die Monotonie der Funktionen  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\overline{\lambda}$  wie für  $\underline{g}_t$ ,  $g_t$ ,  $\overline{g}_t$  zu bekommen definiert man zunächst:

**Definition 5.10.**

$$\beta_{\lambda}(\lambda) := \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma, \quad (5.114)$$

$$\tilde{\beta}_{\lambda}(\lambda) := \tilde{\alpha}\lambda^2 + \tilde{\beta}\lambda + \tilde{\gamma}, \quad (5.115)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha & := \frac{6}{\pi^2}, \\ \beta & := \frac{1}{16\pi^2}(24\underline{g}_t^2(t_c + \Delta t_c) - 9\underline{g}_2^2(t_c - \Delta t_c) - 3\underline{g}_1^2(t_c + \Delta t_c)), \\ \gamma & := \frac{1}{16\pi^2}(-6\underline{g}_t^4(t_c - \Delta t_c) + \frac{9}{32}\underline{g}_2^4(t_c + \Delta t_c) + \frac{3}{32}\underline{g}_1^4(t_c - \Delta t_c) \\ & \quad + \frac{3}{16}\underline{g}_2^2(t_c + \Delta t_c)\underline{g}_1^2(t_c - \Delta t_c)), \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} & := \frac{6}{\pi^2}, \\ \tilde{\beta} & := \frac{1}{16\pi^2}(24\overline{g}_t^2(t_c + \Delta t_c) - 9\overline{g}_2^2(t_c + \Delta t_c) - 3\overline{g}_1^2(t_c - \Delta t_c)), \\ \tilde{\gamma} & := \frac{1}{16\pi^2}(-6\overline{g}_t^4(t_c + \Delta t_c) + \frac{9}{32}\overline{g}_2^4(t_c - \Delta t_c) + \frac{3}{32}\overline{g}_1^4(t_c + \Delta t_c) \\ & \quad + \frac{3}{16}\overline{g}_2^2(t_c - \Delta t_c)\overline{g}_1^2(t_c + \Delta t_c)). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Die Anfangswertprobleme

$$\dot{\underline{\lambda}} = \beta_{\lambda}(\underline{\lambda}), \quad \underline{\lambda}(t^*) = c; \quad \dot{\tilde{\lambda}} = \tilde{\beta}_{\lambda}(\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}(t^*) = c' \quad (5.118)$$

werden für den Fall, dass

$$\left| \frac{c + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} \right| > 1, \quad \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} > 0, \quad (5.119)$$

$$\left| \frac{c' + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} \right| > 1, \quad \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} > 0, \quad (5.120)$$

gilt, durch die Funktionen

$$\tilde{\lambda}(t) = \left( \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} \right) \coth \left( -\frac{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} (t - t^*) + \operatorname{arcoth} \left( \frac{c + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}, \quad (5.121)$$

$$\lambda(t) = \left( \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} \right) \coth \left( -\frac{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} (t - t^*) + \operatorname{arcoth} \left( \frac{c' + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}, \quad (5.122)$$

gelöst. Man kann dies direkt verifizieren, da (5.115), (5.114) Anfangswertprobleme mit getrennten Variablen definieren.

**Lemma 5.6.** *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 5.4 und 5.5 und die Gleichungen (5.119) und (5.120). Dann sind die Funktionen  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  aus Definition 5.9 zu jedem Anfangswert  $\underline{\lambda}(t^*)$ ,  $\lambda(t^*)$ ,  $\bar{\lambda}(t^*) \in [f(\underline{g}_t(t^*)), f(\bar{g}_t(t^*))]$   $t^* \in T_c$ , mit  $f$  eine homogene, positive, quadratische Funktion, die monoton wachsend auf  $T_c$  ist, wenn gilt:*

$$\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} \leq \tilde{\lambda}(t_c - \Delta t_c), \quad (5.123)$$

wobei  $\tilde{\lambda}$  das Anfangswertproblem

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \tilde{\beta}_{\tilde{\lambda}}, \quad \tilde{\lambda}(t_c + \Delta t_c) = f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)) \quad (5.124)$$

auf  $T_c$  löst.

**Beweis:** Der folgende Beweis gliedert sich in zwei Schritte: Zuerst wird eine untere Schranke für die Werte von  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  auf  $T_c$  bestimmt, die sicherstellt, dass  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  auf  $T_c$  monoton wachsend sind (linke Seite von (5.123)). Danach werden die Werte von  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  auf  $T_c$  durch  $\tilde{\lambda}(t_c - \Delta t_c)$  nach unten abgeschätzt.

1. Schritt: Nach Konstruktion gilt:

$$\beta_{\lambda}(\lambda) \leq \underline{\beta}_{\lambda}(t, \lambda), \beta_{\lambda}(t, \lambda), \overline{\beta}_{\lambda}(t, \lambda), \quad \forall t \in T_c, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.125)$$

Sicher sind  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  auf  $T_c$  monoton wachsend, wenn auf  $T_c$  gilt:

$$\dot{\underline{\lambda}}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{\bar{\lambda}}(t) \geq 0, \quad \forall t \in T_c.$$

$\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  genügen nach ihrer Definition den Differentialgleichungen:

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = \underline{\beta}_{\lambda}(t, \underline{\lambda}(t)), \quad \dot{\lambda}(t) = \beta_{\lambda}(t, \lambda(t)), \quad \dot{\bar{\lambda}}(t) = \overline{\beta}_{\lambda}(t, \bar{\lambda}(t)).$$

Andererseits gilt  $0 \leq \beta_{\lambda}(\lambda) = \alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$ , wenn

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}}$$

gilt. Somit erhält man also

$$0 \leq \beta_{\lambda}(\underline{\lambda}(t)) \leq \dot{\underline{\lambda}}(t), \quad 0 \leq \beta_{\lambda}(\lambda(t)) \leq \dot{\lambda}(t), \quad 0 \leq \beta_{\lambda}(\bar{\lambda}(t)) \leq \dot{\bar{\lambda}}(t),$$

wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}} \leq \underline{\lambda}(t), \lambda(t), \bar{\lambda}(t), \quad \forall t \in T_c$$

erfüllt ist.

2. Schritt: Nach Voraussetzung sind die Funktionen  $\underline{g}_t$ ,  $\overline{g}_t$  auf  $T_c$  positiv und monoton fallend. Somit sind auch  $f \circ \underline{g}_t$  und  $f \circ \overline{g}_t$  auf  $T_c$  positiv und monoton fallend. Dies heißt aber, dass das Minimum und das Maximum der Menge  $\{x \mid f(\underline{g}_t(t)) \leq x \leq f(\overline{g}_t(t)), t \in T_c\}$  durch  $f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c))$  und  $f(\overline{g}_t(t_c - \Delta t_c))$  gegeben ist. Sei nun  $\tilde{\lambda}$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{\lambda}} = \tilde{\beta}_{\lambda}(\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda}(t_c + \Delta t_c) = f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c))$$

auf  $T_c$ . Die explizite Form von  $\tilde{\lambda}$  ist durch Gleichung (5.121) gegeben. Für die Ableitung erhält man dann:

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = \frac{\frac{1}{4} \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \tilde{\gamma}}{\sinh^2 \left( -\frac{\frac{1}{4} \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \tilde{\gamma}}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \tilde{\gamma}}} (t - t_c - \Delta t_c) + \operatorname{arccoth} \left( \frac{f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c) + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}})}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \tilde{\gamma}}} \right) \right)} \geq 0.$$

Also ist  $\tilde{\lambda}$  auf  $T_c$  monoton wachsend und hat sein Minimum bei  $t_c - \Delta t_c$ .

Seien nun  $\hat{\lambda} \in \{\underline{\lambda}, \lambda, \bar{\lambda}\}$  und  $\hat{\beta}_\lambda \in \{\underline{\beta}_\lambda, \beta_\lambda, \bar{\beta}_\lambda\}$ , und  $\hat{\lambda}$  sei Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\hat{\lambda}} = \hat{\beta}_\lambda, \quad \hat{\lambda}(t^*) \in [f(\underline{g}_t(t^*)), f(\bar{g}_t(t^*))].$$

Sei nun:

$$\lambda_u(t) := \begin{cases} \lambda_\ell(t), & t < t^* \\ \lambda_r(t), & t \geq t^* \end{cases},$$

wobei  $\lambda_\ell$  Lösung von  $\dot{\lambda}_\ell = \tilde{\beta}_\lambda(\lambda_\ell)$  mit  $\lambda_\ell(t^*) = f(\underline{g}_t(t^*))$  und  $\lambda_r$  Lösung von  $\dot{\lambda}_r = \tilde{\beta}_\lambda(\lambda_r)$  mit  $\lambda_r(t^*) = f(\underline{g}_t(t^*))$  ist. Dann ist  $\lambda_u$  eine Unterfunktion von  $\hat{\lambda}$ , da  $\forall t \in T_c \forall \lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\beta_\lambda \leq \hat{\beta}_\lambda(t, \lambda) \leq \tilde{\beta}_\lambda(\lambda), \quad \lambda_u(t^*) \leq \hat{\lambda}(t^*);$$

damit folgt die Aussage aus Satz C.1.

Es bleibt noch zu zeigen dass,  $\tilde{\lambda}(t) \leq \lambda_u \forall t \in T_c$  ist. Für  $t \leq t^*$  folgt dies sofort aus Satz C.1, da  $\lambda_u(t^*) \geq f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)) \geq \tilde{\lambda}(t_c + \Delta t_c) \geq \tilde{\lambda}(t^*)$  gilt aufgrund der Monotonieeigenschaften von  $\underline{g}_t$  und  $\tilde{\lambda}$ .

Für  $t \geq t^*$  hat  $\dot{\lambda}_u$  genau die gleiche Form wie in Gleichung (5.3), nur dass  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)), t_c + \Delta t_c$  durch  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} c, t^*$  mit  $c \in [f(\underline{g}_t(t^*)), f(\bar{g}_t(t^*))]$  zu ersetzen sind. Also gilt  $\dot{\lambda}_u(t) \geq 0$  für  $t \geq t^*$ . Damit gilt also:

$$\forall t \in T_c \lambda_u(t) \geq \lambda_u(t^*) \geq f(\underline{g}_t(t^*)) \geq f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)) \geq \tilde{\lambda}(t_c + \Delta t_c).$$

Aber aufgrund seiner Monotonieeigenschaften hat  $\tilde{\lambda}$  bei  $t_c + \Delta t_c$  sein Maximum.  $\square$

**Lemma 5.7.** *Seien  $\underline{\lambda}, \lambda, \bar{\lambda}$  die durch Definition 5.9 gegebenen Funktionen, und die Voraussetzungen der Lemmata (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) seien erfüllt. So gilt:*

$$\forall t \in [0, t_c - \Delta t_c] \quad \underline{\lambda}(t) \leq \lambda(t) \leq \bar{\lambda}(t). \quad (5.126)$$

**Beweis:** Es reicht hierfür zu zeigen:

$$\underline{\lambda}(t_c - \Delta t_c) \leq \lambda(t_c - \Delta t_c) \leq \bar{\lambda}(t_c - \Delta t_c).$$

Es gilt, da  $\underline{\lambda}, \lambda, \bar{\lambda}$  nach Lemma 5.6 auf  $T_c$  monoton steigend sind und nach Definition 5.9

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}(t_c - \Delta t_c) &\leq \underline{\lambda}(t_c + \Delta t_c) = f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)), \\ \lambda(t_c - \Delta t_c) &\leq \lambda(t_c) = f(g_t(t_c)), \\ \bar{\lambda}(t_c - \Delta t_c) &= f(\bar{g}_t(t_c - \Delta t_c)). \end{aligned}$$

Da  $\underline{g}_t, g_t$  nach Lemma 5.4 und 5.5 auf  $T_c$  monoton fallend und positiv sind und  $f$  nach Voraussetzung positiv, homogen und quadratisch ist, so sind  $f \circ \underline{g}_t$  und  $f \circ g_t$  auf  $T_c$  monoton fallend.

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(t_c - \Delta t_c) &\leq f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)) \leq f(\underline{g}_t(t_c - \Delta t_c)), \\ \lambda(t_c - \Delta t_c) &\leq f(g_t(t_c)) \leq f(g_t(t_c - \Delta t_c)).\end{aligned}$$

Nach den Definitionen von  $\underline{g}_t$ ,  $g_t$ ,  $\overline{g}_t$  und Lemma 5.3 folgt:

$$\underline{g}_t(t_c - \Delta t_c) \leq g_t(t_c - \Delta t_c) \leq \overline{g}_t(t_c - \Delta t_c).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(t_c - \Delta t_c) &\leq f(\underline{g}_t(t_c - \Delta t_c)) \leq f(\overline{g}_t(t_c - \Delta t_c)) = \overline{\lambda}(t_c - \Delta t_c), \\ \lambda(t_c - \Delta t_c) &\leq f(g_t(t_c - \Delta t_c)) \leq f(\overline{g}_t(t_c - \Delta t_c)) = \overline{\lambda}(t_c - \Delta t_c).\end{aligned}$$

Damit folgt aus den Vergleichssätzen C.1 und C.2

$$\overline{\lambda}(t) \geq \lambda(t), \underline{\lambda}(t), \quad t \in [0, t_c - \Delta t_c].$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(t_c) &\leq \underline{\lambda}(t_c + \Delta t_c) \leq f(\underline{g}_t(t_c + \Delta t_c)) \\ &\leq f(g_t(t_c + \Delta t_c)) \leq f(g_t(t_c)) \\ &= \lambda(t_c).\end{aligned}$$

Nach den Sätzen C.1 und C.2 erhält man dann:

$$\lambda(t) \geq \underline{\lambda}(t), \quad t \in [0, t_c],$$

woraus die Aussage folgt. Es ist bei diesen Überlegungen zu beachten, dass die Integration der Gleichungen in negativer  $t$ -Richtung verläuft.  $\square$

Somit sind Bedingungen gefunden worden, unter denen die Unter- und Oberfunktion für  $\lambda$  durch Definition 5.9 gegeben sind, die die eingangs genannten Fehler berücksichtigen. Hierdurch ist es möglich, wenn man das Differentialgleichungssystem (5.86) numerisch integriert, den Einfluss aller im Anfang dieses Abschnittes genannten Fehlerquellen nach oben und nach unten abzuschätzen.



## 5.4 Renormierungsgruppengleichungen und die Higgs-Masse

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik liefert für die Masse des Higgs-Bosons in der hier gewählten Normierung die folgende Beziehung (s. [Na], [Ca, Io, Ka, Sch]):

$$m_h = 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{\Lambda}}{g_2}m_W. \quad (5.127)$$

$m_W$  bezeichnet hier die Masse des  $W$ -Bosons. Allerdings sind die in der obigen Gleichung vorkommenden Größen  $\lambda$ ,  $g_2$ ,  $m_W$  aufgrund von Quantenkorrekturen Funktionen der Energieskala  $\Lambda$  beziehungsweise der Renormierungsskala  $t = \ln\left(\frac{\Lambda}{E_0}\right)$ , bei der die betrachteten physikalischen Prozesse ablaufen, abhängig.  $E_0$  ist hierbei ein beliebiger Energiebezugspunkt. Um nun die Higgs-Masse  $m_H$  für einen experimentell zugänglichen Energiebereich zu bestimmen, typischerweise  $E_0 = m_Z \approx 91.187\text{GeV}$  beziehungsweise  $t = 0$ , ( $m_Z$  bezeichne hier die Masse des  $Z$ -Bosons), müssen alle Kopplungen und Massen an diesem Skalenpunkt bekannt sein. Dies ist allerdings nicht der Fall. Insbesondere ist  $\lambda$  am Skalenpunkt  $t = 0$  experimentell nicht zugänglich. Allerdings genügen  $\lambda$  und  $g_t$  Differentialgleichungen, den Renormierungsgruppengleichungen, die in der 1-Loop-Näherung bei Top-Quark-Masse-Approximation durch die Gleichungen (5.76) gegeben sind (s. [Fo, Jo, St, Ei]). Um das Gleichungssystem eindeutig zu lösen, das sich aus (5.76) ergibt, müssen die Werte von  $g_t$ ,  $\lambda$  an einem Skalenpunkt  $t^*$  bekannt sein.

Da die Differentialgleichung für  $g_t$  von der Differentialgleichung für  $\lambda$  entkoppelt und für  $t = 0$  ein gemessener Wert  $g_{t0}$  vorliegt, lässt sich durch Integration dieser Gleichung  $g_t(t)$  an jedem geforderten Skalenpunkt  $t$  bestimmen.

Um Anfangswerte für den Parameter  $\lambda$  zu erhalten, liefert das DEHYMH-Modell eine Möglichkeit, indem die Parameterbeziehungen (5.4) und (5.5) ausgenutzt werden, welche nach den Betrachtungen aus Kapitel 5.2.3 genau an einem Skalenpunkt  $t_c$  gelten. Hier lassen sich Werte für  $\lambda$  bestimmen. Da sich auch  $g_t(t_c)$  bestimmen lässt, kann man das Differentialgleichungssystem aus (5.76) vom Skalenpunkt  $t_c$  bis 0 integrieren und somit  $\lambda$  an der Stelle  $t = 0$  bzw.  $\Lambda = E_0 = m_Z$  bestimmen.

Im Folgenden wird auf die beschriebene Weise die Higgs-Masse für das Standardmodell mit und ohne rechtshändige Neutrinos bestimmt. Dabei werden in den Parameterbeziehungen (5.3), (5.4) bzw. (5.10), (5.11) die  $\Lambda$ -Matrizen durch die Yukawa-Kopplungsmatrizen ersetzt, was der natürlichen Wahl im Dirac-Modell entspricht (s. Kap. 4). Weiterhin stellt sich heraus, dass die Parameterbeziehungen für das Standardmodell mit und ohne rechtshändigen Neutrinos bei den gemachten Näherungen das Gleiche liefern.

### 5.4.1 Parameterbeziehungen

Für das Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos ergeben sich in der Top-Quark-Massen-Approximation folgende Parameterbeziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= 2A \frac{\frac{33}{18} + \frac{3}{2}x}{4+x}, \\
\frac{1}{g_2^2} &= A \frac{3+x}{4+x}, \\
\frac{1}{g_3^2} &= 4A \frac{1}{4+x},
\end{aligned} \tag{5.128}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 2B \frac{g_t^2}{4+x}, \\
\lambda &= C \frac{g_t^4}{4+x},
\end{aligned} \tag{5.129}$$

wobei hier  $y_q = \frac{11}{18}$ ,  $y_\ell = \frac{3}{2}$ ,  $N = 3$  und  $x := \frac{1}{3}\text{tr}X$  gesetzt wurde.

Teilt man nun die erste Gleichung von (5.129) durch die zweite Gleichung von (5.129) und setzt für  $B$  und  $C$  ein, so erhält man:

$$\lambda = \frac{3}{4} \left( \frac{a_0}{a_3} \right)^2 g_t^2. \tag{5.130}$$

Hier hängt  $\lambda$  am kritischen Skalenpunkt  $t_c$  vom Verhältnis  $\frac{a_0}{a_3}$  ab, so dass  $\lambda$  durch geeignete Wahl von  $a_0$  beziehungsweise  $a_3$  auf jeden beliebigen positiven Wert fixiert werden kann. Des Weiteren ist die Wahl des Parameters  $a_3$  nicht völlig frei. Dividiert man die zweite Gleichung von (5.129) durch die dritte Gleichung von (5.128) und setzt für  $A$  und  $B$  ein, so erhält man die Beziehung

$$a_2^2 = 2 \left( \frac{g_t}{g_3} \right)^2 a_3^2, \tag{5.131}$$

wobei  $g_t$  hier für den Wert der Top-Yukawa-Kopplung an der Stelle  $t_c$  steht. Bestimmt man nun den numerischen Vorfaktor in Gleichung (5.131) mit Hilfe der Gleichungen (5.83) und den Werten aus Tabelle 5.1, so findet man, dass die geometrisch motivierten Parameterwahlen (s. Kap. 3)

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_3 = a_2, \\
a_0 &= a_3 = \frac{3}{4}a_2,
\end{aligned}$$

(s. [Tol]) nicht möglich sind, wie sich im Folgenden zeigt. Allerdings ist der Wechselwirkungsfall mit  $a_3 = a_0$  realisierbar. Der Parameter  $a_2$  wird durch die Gleichung (5.131) festgelegt. Hierdurch wird die Längenskala  $\ell$  festgelegt, da der numerische Wert von  $A$  durch Lemma 5.1 bzw. 5.2 festgelegt ist. Setzt man nun die Definition für  $A$  im Standardmodell (SM) (s. Gl. (5.9) bzw. für  $A'$  im Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos (R- $\nu$ ) (s. Gl. (5.13)) ein, so ergeben sich für den Fall  $n = 2$  die Beziehungen:

$$a_2^2 \ell^2 = 4\pi A \ell_p^2 \quad (\text{SM}), \quad a_2^2 \ell^2 = \frac{16}{3} \pi A' \ell_p^2 \quad (\text{R-}\nu). \tag{5.132}$$

Es zeigt sich damit, dass für fest gewählten Parameter  $a_2$  sich die Längenskalen  $\ell$  im Allgemeinen im Standardmodell mit und ohne rechtshändige Neutrinos unterscheiden.

Für den Fall  $a_0 = a_3$  erhält man eindeutige Werte für  $\lambda$  an der Stelle  $t_c$ :

$$\lambda = \frac{3}{4}g_t^2.$$

Macht man nun die obige Betrachtung auch für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= A' \frac{\frac{11}{3} + 3x}{3 + x}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= A', \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{4A'}{3 + x}, \end{aligned} \tag{5.133}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 2B' \frac{g_t^2}{3 + x}, \\ \lambda &= C' \frac{g_t^4}{3 + x}, \end{aligned} \tag{5.134}$$

Bei der Untersuchung der Parameterbeziehungen von  $\lambda$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  und  $\mu^2$  erhält man exakt dieselben Relationen wie beim Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos:

$$\lambda = \frac{3}{4} \left( \frac{a_0}{a_3} \right)^2 g_t^2, \tag{5.135}$$

$$a_2^2 = 2 \left( \frac{g_t}{g_3} \right)^2 a_3^2. \tag{5.136}$$

Die Parameterbeziehungen für  $\lambda$  und die Modellparameter  $a_i$  sind in der Top-Quark-Massen-Approximation für beide Modelltypen die Gleichen.

### 5.4.2 Bestimmung der Higgs-Masse mit Hilfe der Kopplungen $g_t$ und $\lambda$

Im Folgenden soll mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen (5.76) die Masse für das Higgs-Boson bestimmt werden. Dabei wird, wie am Anfang von Kapitel 5.4 beschrieben, vorgegangen.

#### Der kritische Skalenpunkt

Als numerische Werte für die Parameter  $t_c$  aus Lemma (5.1) und  $\Delta t_c$  ergeben sich mit den Daten aus Tabelle 5.1:

$$t_c = 18.47343560, \tag{5.137}$$

$$\Delta t_c = 0.2646024902. \tag{5.138}$$

Tabelle 5.1: Eichkopplungen

	Wert	Absolutfehler
$g_1$	0.3575	0.0001
$g_2$	0.6507	0.0007
$g_3$	1.218	0.0026

Eichkopplungen bei der Energie  $E = m_Z = 91.187 GeV$  Quelle: [Ca, Io, Ka, Sch]

Hier bezeichnet  $\Delta t_c$  den Fehler in linearer Ordnung von  $t_c$ , was bei diesen Fehlergrößen angemessen ist.  $t_c$  entspricht einer Energie von:

$$E_c = (0.90 \pm 0.29) \cdot 10^{10} \text{ GeV}. \quad (5.139)$$

Bestimmt man den Definitionsbereich  $D$  aus Definition 5.3 so erhält man:

$$D = [0, 90.35704177). \quad (5.140)$$

Hierdurch wird sichergestellt, dass das kritische Intervall  $T_c = [t_c - \Delta t_c, t_c + \Delta t_c]$  innerhalb des Definitionsbereichs  $D$  der Funktionen  $g_1, g_2, g_3$  liegt.

### Untersuchung der Renormierungsgruppengleichungen von $g_t$

Untersucht man nun die Änderung von  $g_t$  mit der durch  $t := \ln\left(\frac{\Lambda}{m_Z}\right)$  definierten Renormierungsskala, so ergibt sich nach Einsetzen der Lösungen für die Eichkopplungen in die erste Gleichung von (5.76) das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \dot{g}_t(t) &= \frac{1}{16\pi^2} \left( 9g_t^3(t) - \left( 8\frac{1}{A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t} + \frac{9}{4} \frac{1}{A_2 + \frac{19}{48\pi^2}t} + \frac{17}{12} \frac{1}{A_1 - \frac{41}{48\pi^2}t} \right) g_t(t) \right), \\ g_t(0) &= g_{t0}. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Hier ist der Anfangswert  $g_{t0}$  durch die folgenden Beziehungen des Standardmodells gegeben (s. [Na], [Ca, Io, Ka, Sch]):

$$\begin{aligned} g_{t0} &= \frac{m_t}{v} \\ v &= 2 \frac{m_W}{g_2}. \end{aligned} \quad (5.142)$$

$v$  bezeichnet den Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes im Standardmodell. Mit den empirischen bestimmten Werten aus z.B. [Ca, Io, Ka, Sch] bei der Energie  $E_0 = m_Z = 91.187 GeV$  beziehungsweise  $t = 0$  und

$$\begin{aligned} m_t(0) &= 175 \pm 6 \text{ GeV} \\ m_W(0) &= 80.33 \pm 0.15 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (5.143)$$

erhält man für  $g_{t0}$ :

$$g_{t0} = 0.7087794100 \pm 0.02638699 \quad (5.144)$$

Das Anfangswertproblem (5.141) mit dem Anfangswert (5.144) lässt sich numerisch mit einem sechsstufigen Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren (RKF-Verfahren) lösen, wie es zum Beispiel in [Str,Wei] Kapitel 2 beschrieben ist und als Routine „rkf45“ in MAPLE VI implementiert ist. Den Verlauf von  $g_t(t)$  zeigt die Abbildung 5.1. Des Weiteren wurden, um die Fehler in den Anfangswerten von  $g_{t0}$  und in den Funktionen  $g_i, i = 1, 2, 3$  abzuschätzen die Unter- und Oberfunktionen  $\underline{g}_t, \overline{g}_t$  bestimmt und dargestellt, wie sie in den Gleichungen (5.101) definiert sind. Diese Wahl der Unter- und Oberfunktionen, sofern man den Fehler der numerischen Rechnung vernachlässigt, stellt sicher, dass der wahre Wert von  $g_t(t)$  für  $t \in T_c$  zwischen  $\underline{g}_t(t), \overline{g}_t(t)$  liegt. Die Vernachlässigung des numerischen Fehlers ist gerechtfertigt, da dieser in der Routine „rkf45“ erst in der achten Nachkommastelle auftritt.

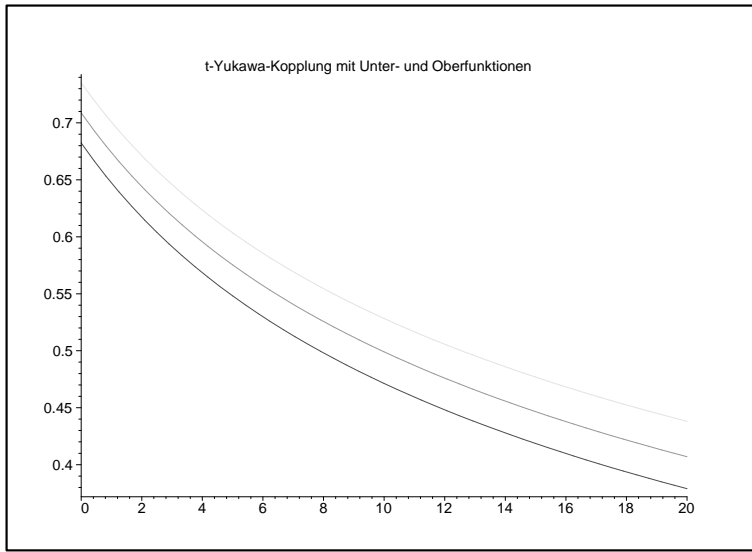


Abbildung 5.1: Verlauf der Top-Yukawa-Kopplung

Da nach Lemma 5.3 auf  $T_c$  gilt:  $\forall t \in T_c : \underline{g}_t(t) \leq g_t(t) \leq \overline{g}_t(t)$ , woraus folgt, dass  $\underline{g}_t(t_c - \Delta t_c) \leq g_t(t_c - \Delta t_c) \leq \overline{g}_t(t_c - \Delta t_c) =: c$  ist. Als numerischer Wert von  $c$  ergibt sich:

$$c = 0.450873. \quad (5.145)$$

Des Weiteren sei

$$\alpha := 8\underline{g}_3^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{9}{4}\underline{g}_2^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{17}{12}\underline{g}_1^2(t_c - \Delta t_c).$$

Als numerischer Wert für  $\frac{1}{3}\sqrt{\alpha}$  ergibt sich:

$$\frac{1}{3}\sqrt{\alpha} = 0.69678, \quad (5.146)$$

womit die Voraussetzungen aus Lemma 5.4 erfüllt sind und somit  $\underline{g}_t, g_t, \overline{g}_t$  auf  $T_c$  monoton fallend sind. Weiter gilt für die Größe  $\beta$  aus Lemma 5.5:

$$\begin{aligned}
\beta &:= 8\bar{g}_3^2(t_c - \Delta t_c) + \frac{9}{4}g_2^2(t_c - \Delta t_c) + \frac{17}{12}\bar{g}_1^2(t_c + \Delta t_c) \\
&= 4.4577 \leq 8\pi^2 \approx 78.9568.
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Die Voraussetzungen von Lemma 5.5 sind damit erfüllt. Somit sind  $\underline{g}_t, g_t, \bar{g}_t$  auf  $T_c$  positiv.

An dieser Stelle lassen sich Aussagen über die Kompatibilität der ausgezeichneten Parameterwahlen für  $a_0, a_2$  und  $a_3$  (s. Kap. 3, Gl. (3.19), (3.20)) machen. Für die geometrischen Fälle aus Kapitel 3 muss gelten:

$$a_2 = a_0 = a_3, \tag{5.148}$$

$$a_0 = a_3 = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) a_2. \tag{5.149}$$

Hier bezeichnet  $2n$  die Dimension der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ .

Seien nun:

$$\underline{\kappa} := 2 \left( \frac{g_t(t_c - \Delta t_c)}{\bar{g}_3(t_c + \Delta t_c)} \right)^2, \tag{5.150}$$

$$\kappa := 2 \left( \frac{g_t(t_c)}{g_3(t_c)} \right)^2, \tag{5.151}$$

$$\bar{\kappa} := 2 \left( \frac{\bar{g}_t(t_c + \Delta t_c)}{\underline{g}_3(t_c - \Delta t_c)} \right)^2. \tag{5.152}$$

$\kappa$  ist gerade der Proportionalitätskoeffizient zwischen  $a_2^2$  und  $a_3^2$ , wie er durch Gleichung (5.131) gegeben ist.  $\bar{\kappa}$  und  $\underline{\kappa}$  sind die obere und untere Schranken von  $\kappa$ , wie sie sich aus den Renormierungsgleichungen ergeben. Als numerische Werte erhält man:

$$\underline{\kappa} = 0.6882907230, \tag{5.153}$$

$$\kappa = 0.8090985548, \tag{5.154}$$

$$\bar{\kappa} = 0.9506430755. \tag{5.155}$$

Allerdings müsste bei  $\dim(\mathcal{M}) = 4$  im Fall Gleichung (5.148) gelten:

$$\kappa = 1, \tag{5.156}$$

und im Fall von Gleichung (5.149):

$$\kappa = \frac{16}{9} \approx 1.7777. \tag{5.157}$$

Die Werte der beiden geometrischen Fälle liegen außerhalb der numerische Schranken von  $\kappa$ , so dass die geometrischen Parameterwahlen nicht möglich sind. Es zeigt sich aber, dass die Parameterwahl für den so- genannten Wechselwirkungsfall  $a_3 = a_0 = a$  (s. Gl. (3.21)) möglich ist. Aus diesem Grund beschränkt sich die weitere Diskussion auf diesen Fall.

### **Einfluss der Renormierungsgruppengleichungen auf die Kopplung $\lambda$**

Um die numerischen Werte der Kopplung  $\lambda$  am Skalenpunkt  $t = 0$  zu bestimmen, muss das Differentialgleichungssystem

$$\dot{g}_t = \beta_t, \quad (5.158)$$

$$\dot{\lambda} = \beta_\lambda \quad (5.159)$$

mit Anfangswerten am kritischen Skalenpunkt  $t_c$  integriert werden. Der Wert von  $\lambda$  ist im Wechselwirkungsfall am kritischen Skalenpunkt  $t_c$  nach Abschnitt 5.4.1 durch die Gleichung

$$\lambda(t_c) = \frac{3}{4}g_t^2(t_c) \quad (5.160)$$

gegeben. Dabei tritt das Problem auf, dass die Größen  $t_c$ ,  $g_t(t_c)$  nur mit endlicher Genauigkeit bekannt sind. Des Weiteren sind die  $\beta$ -Funktionen  $\beta_t$  und  $\beta_\lambda$  aufgrund der in den Funktionen  $g_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  auftretenden fehlerbehafteten Parameter  $A_i$  nur mit einem nicht verschwindenden Fehler bestimmbar.

Um den Einfluss dieser Fehler auf den Wert von  $\lambda$  an der Stelle  $t = 0$  abzuschätzen, wählt man Unter- bzw. Oberfunktionen  $\underline{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda}$  wie in Definition 5.9.

$\bar{\lambda}$  lässt sich bestimmen, indem man den Anfangswert  $\bar{\lambda}(t_c)$  nach oben abschätzt und die Differentialgleichung

$$\dot{\bar{\lambda}} = \underline{\beta}_\lambda \quad (5.161)$$

integriert.  $\underline{\lambda}$  erhält man entsprechend.

Damit verbleibt noch das Problem, den Einfluss des Fehlers  $\Delta t_c$  am kritischen Skalenpunkt  $t_c$  auf das Ergebnis abzuschätzen. Man kann nun mit Hilfe der Lemmata aus Abschnitt 5.3 die niedrigsten möglichen Anfangswerte für  $\lambda(t)$  auf  $T_c$  bestimmen. Prüft man nun die Voraussetzungen von Lemma 5.6, so findet man die folgenden numerischen Werte:

$$\frac{\frac{3}{4}\underline{g}_t^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{1}{2}\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}}}} = 3.738609783, \quad (5.162)$$

$$\frac{\frac{3}{4}\underline{g}_t^2(t_c + \Delta t_c) + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\tilde{\alpha}}}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\tilde{\alpha}^2} - \frac{\gamma}{\tilde{\alpha}}}} = 3.636858430, \quad (5.163)$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\tilde{\alpha}}} = 0.02443480920, \quad (5.164)$$

$$\tilde{\lambda}(t_c + \Delta t_c) = 0.1116626791. \quad (5.165)$$

Die Größen  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\lambda}$  sind in Definition 5.10 definiert. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 5.6 erfüllt und es folgt, dass  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  für alle betrachteten Fälle auf  $T_c$  monoton wachsend und positiv sind.

Tabelle 5.2:  $\lambda$ -Kopplung

$\underline{\lambda}(0)$	0.061926
$\lambda(0)$	0.072726
$\overline{\lambda}(0)$	0.084389

### Numerische Ergebnisse für die Kopplung $\lambda$

Die numerischen Ergebnisse für  $\underline{\lambda}$ ,  $\lambda$ ,  $\overline{\lambda}$  bei  $t = 0$  sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Sie wurden mit der MAPLE VI-Routine „rkf45“ ermittelt.

Der Verlauf der Kopplung  $\lambda$  entlang der der Renormierungsskala  $t$  findet sich in Abbildung 5.2.

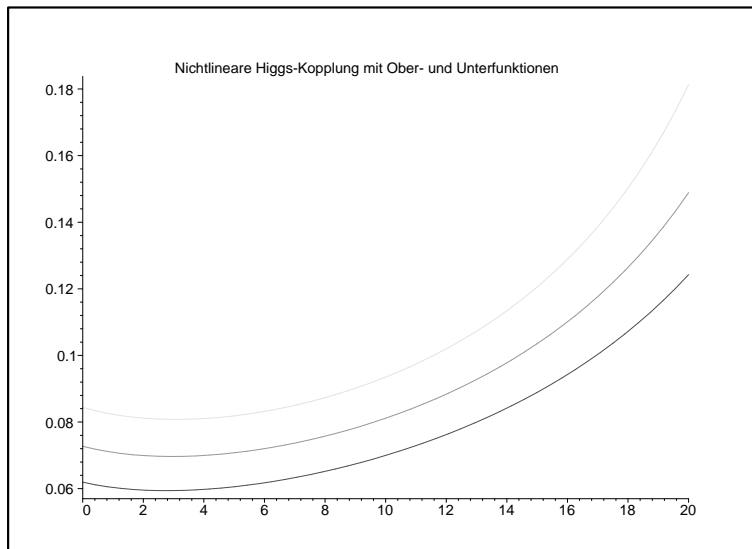


Abbildung 5.2: Verlauf der  $\lambda$ -Kopplung

### Bestimmung der Higgs-Masse mit Hilfe von $\lambda$

Die Higgs-Masse lässt sich am Skalenpunkt  $t = 0$  mit Hilfe der Formel (5.127) bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst.

### Betrachtungen für beliebige Higgs-Kopplungen an der Stelle $t_c$

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, was passiert, wenn man die Parameter  $a_0$ ,  $a_3$  als frei wählbar annimmt. Damit erhält man an der Stelle  $t_c$  Anfangswerte, für die das Differentialgleichungssystem (5.86) die Form hat:

$$\begin{aligned} g_t(t_c) &= g_{tt_c}, \\ \lambda(t_c) &= c, \quad c > 0. \end{aligned} \tag{5.166}$$

Das Ziel ist es, untere und obere Schranken für  $\lambda(0)$  und damit für die Higgs-Masse bei  $t = 0$  zu bestimmen.



Tabelle 5.3: Higgs-Masse bestimmt aus  $\lambda$

$\underline{m}_h$	173.2727 GeV
$m_h$	188.3291 GeV
$\overline{m}_h$	203.464 GeV

Für den Fall  $c = 0$  ergibt sich mit den im Vorhergehenden beschriebenen Methoden als untere Schranke:

$$\underline{\lambda}(0) = 0.03462872. \quad (5.167)$$

Der Verlauf von  $\underline{\lambda}$  mit  $\underline{\lambda}(t_c) = 0$  ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

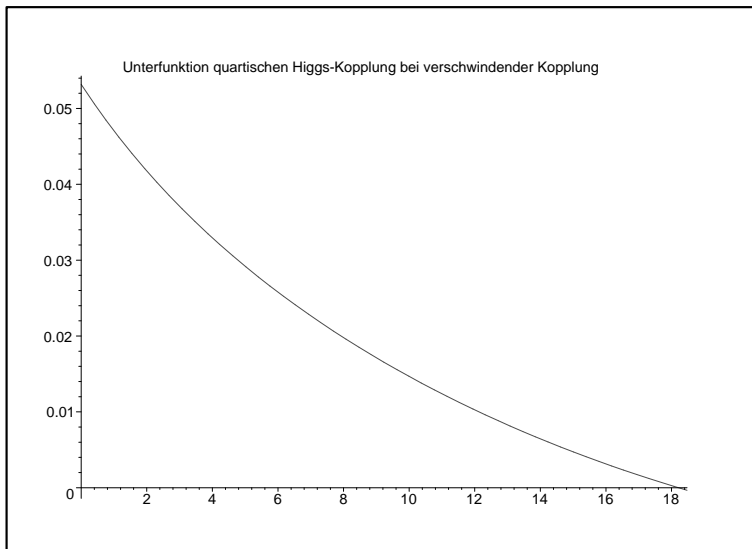


Abbildung 5.3: Verlauf der  $\lambda$ -Kopplung zum Anfangswert  $\lambda(t_c) = 0$

Als untere Schranke für die Higgs-Masse erhält man für diesen Fall:

$$\underline{m}_H = 129.5719 \text{ GeV}. \quad (5.168)$$

Um eine obere Schranke für die Higgs-Masse zu finden, muss man das Anfangswertproblem (5.166) für den Fall  $c \rightarrow \infty$  untersuchen:

Die Idee dieses Problem zu untersuchen, gründet sich auf die folgende Überlegung: Man schätzt die  $\beta$ -Funktion für  $\lambda$  auf dem Intervall  $[0, t_c + \Delta t_c]$  nach oben durch eine Funktion  $\tilde{\beta}_\lambda(t, \lambda)$  ab, so dass die Lösung für das Anfangswertproblem

$$\dot{\lambda} = \tilde{\beta}_\lambda, \quad \lambda(t_c) = c \quad (5.169)$$

eine Oberfunktion zu den durch  $\underline{\beta}_\lambda$ ,  $\beta_\lambda$  und  $\overline{\beta}_\lambda$  definierten Anfangswertproblemen liefert, die explizit von dem Anfangswert  $c$  abhängen. Dadurch wird es möglich, den Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$  explizit durchzuführen.

Seien dazu:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_\lambda &:= \ell_1 \lambda^2 + \ell_2 \lambda + \ell_3, \\ \ell_1 &:= \frac{6}{\pi^2}, \\ \ell_2 &:= \frac{1}{16\pi^2} (24\overline{g}_t^2(0) - 9\overline{g}_2^2(t_c + \Delta t_c) - 3\overline{g}_1^2(0)), \\ \ell_3 &:= \frac{1}{16\pi^2} (-6\underline{g}_t^4(t_c + \Delta t_c) + \frac{9}{32}\overline{g}_2^4(0) + \frac{3}{32}\overline{g}_1^4(t_c + \Delta t_c) \\ &\quad + \frac{3}{16}\overline{g}_2^2(0)\overline{g}_1^2(t_c + \Delta t_c)). \end{aligned} \quad (5.170)$$

Untersucht man weiter das Anfangswertproblem

$$\dot{\lambda} = \ell_1 \lambda^2 + \ell_2 \lambda + \ell_3, \quad \lambda(t^*) = c, \quad t^* \in T_c, \quad (5.171)$$

so lässt sich, eine elementare Lösung der Form

$$\tilde{\lambda}(t) = \sqrt{|\beta|} \coth \left( \frac{\ell_1 \beta}{\sqrt{|\beta|}} (t - t_c) + \operatorname{arcoth} \left( \frac{c + \alpha}{\sqrt{|\beta|}} \right) \right) - \alpha \quad (5.172)$$

finden, die nach dem Satz von Picard-Lindelöf (s. [Heu]) eindeutig ist. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{2} \frac{\ell_1}{\ell_2}, \\ \beta &:= -\frac{1}{4} \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} + \frac{\ell_3}{\ell_1}, \\ \beta &< 0. \end{aligned} \quad (5.173)$$

Des Weiteren findet man, da sich die Monotonieeigenschaften von  $g_t$  aus Kapitel 5.3 auf das Intervall  $[0, t_c + \Delta t_c]$  übertragen lassen, dass gilt:

$$\underline{\beta}_\lambda(t, \lambda), \beta_\lambda(t, \lambda), \overline{\beta}_\lambda(t, \lambda) \leq \tilde{\beta}_\lambda(t, \lambda), \quad t \in [0, t_c + \Delta t_c]. \quad (5.174)$$

Damit ist die Lösung von (5.169) bei entsprechender Wahl der Anfangswerte Oberfunktion für  $\lambda(t)$ .

Man kann für  $\lambda(t)$  mit  $t \in [0, t_c - \Delta t_c]$  für den Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  eine obere Schranke bestimmen, indem man den Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$  für  $\tilde{\lambda}$  durchführt. Als Grenzfunktion erhält man:

$$\tilde{\lambda}_{as}(t) := \sqrt{|\beta|} \coth \left( \frac{\ell_1 \beta}{\sqrt{|\beta|}} (t_c + \Delta t_c) \right) - \alpha. \quad (5.175)$$

Betrachtet man die Stelle  $t = 0$ , so ergibt sich als numerischer Wert:

$$\tilde{\lambda}_{as}(0) = 0.4566939695. \quad (5.176)$$

Für das Higgs-Boson erhält man damit die folgende Masse:

$$\overline{m_{H_{as}}} = 473.3272252 \text{ GeV}. \quad (5.177)$$

Es sollte angemerkt werden, dass aufgrund der vorangegangenen Überlegungen diese Betrachtungen prinzipielle Schranken für die Higgs-Masse im Standardmodell als DEHYMH-Modell ergeben, und zwar unabhängig von der Parameterwahl in  $a_0, a_3$ . Die Masse für das Higgs-Boson muss im Rahmen des DEHYMH-Modells in dem Intervall

$$[129.57, 473.33) \text{ GeV} \quad (5.178)$$

liegen.

## Kapitel 6

# Vergleich mit anderen geometrischen Modellen

In diesem Kapitel sollen die Konsequenzen des DEHYMH-Modells mit denen anderer geometrischer Teilchenmodelle verglichen werden. Dabei beschränken sich die folgende Betrachtungen auf das Chamseddine-Connes-Modell ([Ch,Co], [Ca,Io,Sch], [Ca,Io,Sch]) und das Connes-Lott-Modell ([Co,Lo], [Sch,Zy], [Ka,Sch], [Io,Ka,Sch], [Io,Ka,SchII], [Ca,Io,SchII], [Ca,Io,Sch] [Io,Sch]). Diese beiden Modelle besitzen eine gewisse Verwandtschaft mit dem DEHYMH-Modell, da in allen diesen Modellen verallgemeinerte Dirac-Operatoren eine fundamentale Rolle spielen. Allerdings sind sowohl das Chamseddine-Connes-Modell als auch das Connes-Lott-Modell von der nichtkommutativen Geometrie her motiviert, wogegen das DEHYMH-Modell in einem rein differentialgeometrischen Rahmen formuliert ist (s. [Ack,Tol], [Tol], [Tol2]). Es werden insbesondere die Konsequenzen für das Standardmodell der Teilchenphysik in diesen drei Zugängen verglichen.

### 6.1 Vergleich Chamseddine-Connes/DEHYMH

Der Chamseddine-Connes Zugang zum Standardmodell ist dem des DEHYMH-Modells sehr ähnlich, auch wenn die Motivation eine andere ist. Auch hier ist der Ausgangspunkt ein Dirac-Operator  $\mathcal{D}_{CC}$  auf einem  $\mathbb{Z}_2$ -graduierten, hermiteschen, getwisteten Spinor-Bündel über einer kompakten, randlosen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit gerader Dimension. Des Weiteren werden Funktionale, die die bosonische und die fermionische Wirkung erzeugen, definiert. Hierbei ist das Funktional für die Fermion-Wirkung wie im DEHYMH-Modell definiert. Das bosonische Funktional wird dagegen aus einer modifizierten asymptotischen Entwicklung der Spur des Wärmeleitungskernes von  $\mathcal{D}_{CC}^2$  gewonnen.

Im Folgenden werden kurz die wichtigsten Begriffe zusammengefasst. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in z.B. [Ca,Io,Ka,Sch].

### 6.1.1 Der Dirac-Operator des Chamseddine-Connes Modells

Der Chamseddine-Connes-Dirac-Operator ist ein ungerader Differential-Operator 1. Ordnung, der wie folgt abbildet:

$$\mathcal{D}_{CC} : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}).$$

Hierbei ist  $\mathcal{E}$  das eingangs erwähnte  $\mathbb{Z}_2$ -graduierte, hermitesche, getwistete Spinor-Bündel über einer kompakten, randlosen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension vier. Somit besitzt  $\mathcal{E}$  die Struktur:

$$\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes E.$$

$\mathcal{S}$  ist ein Spinor-Bündel mit Faser-Dimension vier und  $E$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes Vektorbündel, für das gilt:

$$E = E_L \oplus E_R,$$

mit den typischen Fasern:

$$V_L = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N), \quad (6.1)$$

$$V_R = ((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^N). \quad (6.2)$$

Der Dirac-Operator ist dann gegeben durch (s. [Ca, Io, Ka, Sch]):

$$\mathcal{D}_{CC} := D + \gamma_5 \otimes \Phi, \quad (6.3)$$

wobei für  $D$  lokal gilt:

$$D = i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \right) \otimes \mathbf{1}_E + \gamma^\mu \otimes \rho(A_\mu). \quad (6.4)$$

$\omega_{\mu ab}$  sind die Koeffizienten des Spin-Zusammenhanges. Des Weiteren stellt man fest, dass  $D$  ein SDO ist. Darüber hinaus ist  $\rho : SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow \text{Aut}(V_L \oplus V_R)$  die Fermionendarstellung des Standardmodells (s. z.B. Gl. (4.4), (4.5)). Die Tangentialabbildung zu  $\rho$ , die auf der Lie-Algebra  $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$  definiert ist, wird auch wieder mit  $\rho$  bezeichnet.

Weiter ist:

$$\begin{aligned} \Phi &:= \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \phi^* & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi &:= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 g^u & -\bar{\varphi}_2 g^d \\ \varphi_2 g^u & \bar{\varphi}_1 g^d \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -\bar{\varphi}_2 g^e \\ \bar{\varphi}_1 g^e \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Hierbei sind  $g^u, g^d, g^e$  die Yukawa-Kopplungsmatrizen. Für die Clifford-Algebra gilt im Folgenden:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}, \\ \gamma^{\mu*} &= \gamma^\mu, \\ \gamma_5 &= \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4. \end{aligned}$$

Die Hyperladungen sind:

$$\begin{aligned} y_L^q &= \frac{1}{6}, & y_R^u &= \frac{2}{3}, & y_R^e &= -1, \\ y_L^\ell &= -\frac{1}{2}, & y_R^d &= -\frac{1}{3}, & y_H &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Graduierung auf  $\mathcal{E}$  ist gegeben durch:

$$\chi^\mathcal{E} = \gamma_5 \otimes \chi^E.$$

$\chi^E$  ist der Graduierungsoperator zur  $L$ - $R$ -Graduierung auf  $E$ .

Vergleicht man nun  $\mathcal{D}_{CC}$  mit dem Dirac-Operator des *DEHMYH*-Modells, so stellt man fest:  $\mathcal{D}_{CC}$  ist ein Dirac-Yukawa-Operator ist, während der im DEHYMH-Modell verwendete Dirac-Operator ein Pauli-Dirac-Yukawa-Operator ist. Allerdings wird dieser Pauli-Dirac-Yukawa-Operator von einem Dirac-Yukawa-Operator induziert (s. Kap. 3), der dem Chamseddine-Connes-Dirac-Operator  $\mathcal{D}_{CC}$  sehr ähnlich ist. Nur die Endomorphismen  $\Phi$  unterscheiden sich leicht ihrer Struktur (vgl. (4.1)). Des Weiteren operiert der Pauli-Dirac-Yukawa-Operator nicht auf Schnitten in das Bündel  $\mathcal{E}$  wie  $\mathcal{D}_{CC}$ , sondern auf den Schnitten in das verdoppelte Bündel  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$  (s. Kap. 3). Weitere Details hierzu finden sich in [Tol2].

### 6.1.2 Wirkungen

Das fermionische Funktional ist definiert durch:

$$I_f := (\psi, \mathcal{D}_{CC}\psi)_{\Gamma(\mathcal{E})}.$$

$(\cdot, \cdot)_{\Gamma(\mathcal{E})}$  ist hier die hermitische Form auf  $\Gamma(\mathcal{E})$ . Man erhält hier das gleiche Ergebnis wie im DEHYMH-Modell.

Das bosonische Funktional des Chamseddine-Connes Modells ist durch eine modifizierte, asymptotische Entwicklung der Spur des Wärmeleitungskernes von  $\mathcal{D}_{CC}^2$  gegeben (s. z.B. [Ch,Co], [Ca,Io,Ka,Sch]):

$$S_\Lambda^Z := \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathcal{M}} *(\Lambda^4 f_0 a_{0Z} + \Lambda^2 f_2 a_{2Z} + f_4 a_{4Z} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})). \quad (6.6)$$

$\Lambda$  ist hier eine inverse Energie, und die obige Entwicklung gilt für  $\Lambda \rightarrow \text{infy}$ . Physikalisch lässt sich diese asymptotische Entwicklung auf folgende Weise verstehen: Man betrachtet hier nur Vorgänge, die niedrigen Energien stattfinden, und bestimmt hierfür die wesentlichen Beträge der Wirkung. Allerdings entsteht hier die Energieabhängigkeit der Wirkung nicht wie in Abschnitt 5.2 durch den Einfluss von Quanten-Korrekturen, sondern ist durch die Konstruktion der Wirkung bedingt. Weiter sei:

$$f_0 := \int_0^\infty du u f(u), \quad f_2 := \int_0^\infty du f(u), \quad f_4 := f(0). \quad (6.7)$$

$f$  ist hier eine glatte Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , des Weiteren bezeichnet  $\mathcal{O}(\Lambda^{-2})$

hier die Terme in  $\Lambda$ , die höchstens die Ordnung  $-2$  besitzen. Man hat weiter:

$$a_{0Z} := \text{tr}_Z(\mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_E), \quad (6.8)$$

$$a_{2Z} := \frac{1}{6} R \text{tr}_Z(\mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_E) - \text{tr}_Z(\mathcal{V}), \quad (6.9)$$

$$a_{4Z} := \left( \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{180} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \text{tr}_Z(\mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_E) \\ + \frac{1}{12} \text{tr}_Z(F_{\mu\nu}^t F^{t\mu\nu}) - \frac{1}{6} R \text{tr}_Z(\mathcal{V}) + \frac{1}{2} \text{tr}_Z(\mathcal{V}^2). \quad (6.10)$$

Hierbei ist  $\text{tr}_Z(\cdot) := \text{tr}(Z \cdot)$ , wobei  $Z$  ein Element der Kommutante zu  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  bezüglich der Fermionendarstellung auf  $\mathcal{E}$  bezeichnet.  $F_{\mu\nu}^t$  stellt die Komponenten der totalen Krümmung des zum Standardteil von  $\mathcal{D}_{CC}$  gehörenden Clifford-Zusammenhanges dar.  $\mathcal{V}$  ist hier der Potentialterm der Lichnerowicz-Zerlegung von  $\mathcal{D}_{CC}$ .

Die Normierung ist über das folgende Funktional festgelegt:

$$S_\Lambda = \int_{\mathcal{M}} * \left( -\frac{m_p'^2}{16\pi} R + \Lambda'_C \right. \\ \left. - \frac{1}{2g_3^2} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} - \frac{1}{2g_2^2} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} - \frac{1}{4g_1^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \varphi)^* (\mathcal{D}^\mu \varphi) - \frac{1}{2} \mu^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4 \right. \\ \left. - a G_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{12} R |\varphi|^2 \right), \quad (6.11)$$

mit den Definitionen:

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2), \\ \mathcal{D}_\mu \varphi := (\partial_\mu + w_\mu + y_H b_\mu) \varphi, \\ G_{\mu\nu\rho\sigma} := R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma}) \\ + \frac{1}{6} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R.$$

In der letzten Gleichung bezeichnet  $G_{\mu\nu\rho\sigma}$  die Komponenten des Weyl-Tensors.  $C_{\mu\nu}$ ,  $W_{\mu\nu}$  und  $B_{\mu\nu}$  sind wie in Kapitel 4 definiert.  $m_p'$  und  $\Lambda'_C$  sind die Planckmasse und die kosmologische Konstante, bei denen die Beiträge des Vakuumenergiewertes  $v^2 = \frac{\mu^2}{4\lambda}$  von  $\varphi$  noch nicht berücksichtigt sind.  $v$  ist dabei das Minimum des Terms  $-\frac{1}{2} \mu^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4$ . Die vollständige Planckmasse und kosmologische Konstante sind dann gegeben durch:

$$m_p^2 := m_p'^2 - \frac{3}{4} \pi v^2, \\ \Lambda_C := \Lambda'_C + \lambda |v|^4 - \frac{1}{2} \mu^2 |v|^2.$$

Offensichtlich ist hier, im Gegensatz zum Standardmodell der Teilchenphysik (s. [Na]), dass nicht nur ein Term auftritt, der die Einstein-Hilbert-Wirkung beschreibt, wie auch im DEHYMH-Modell, sondern auch Terme, die quadratisch in der Riemannschen Krümmung sind, wie der Weyl-Tensor, und Krümmungsterme, die an das Higgs-Feld  $\varphi$  koppeln.

### 6.1.3 Parameterbeziehungen im Chamseddine-Connes Modell

Zur Bestimmung der Parameterbeziehungen wird als nächstes  $Z$  benötigt. Für  $Z$  ergibt sich nach [Ca, Io, Ka, Sch]:

$$Z = \mathbf{1}_S \otimes \begin{pmatrix} \frac{x}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \otimes y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$y = \text{diag}(y_1, \dots, y_N).$$

$Z$  hat die gleiche Struktur wie das Element der Kommutante im DEHYMH-Modell, wenn man diese auf ein Unterbündel  $\mathcal{E}$  von  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$  einschränkt.

Als Parameterbeziehungen erhält man dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{m_p'^2}{\Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{N y_q + y_\ell \text{tr} X}{4N + 3\text{tr} X}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{4\pi} \frac{m_p'^2}{\Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{N + \text{tr} X}{4N + 3\text{tr} X}, \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{3\pi} \frac{m_p'^2}{\Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{N}{4N + 3\text{tr} X}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{2\pi} \frac{m_p'^2}{\Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*})}{4N + 3\text{tr} X}, \\ \lambda &= \frac{3}{4\pi} \frac{m_p'^2}{\Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^d g^{d*})^2) + \text{tr}(X (g^e g^{e*})^2)}{4N + 3\text{tr} X}, \\ \mu^2 &= \frac{3m_p'^2}{\pi} \frac{\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*})}{4N + 3\text{tr} X}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \Lambda'_C &= \frac{3m_p'^2}{4\pi} \Lambda^2 \frac{f_0}{f_2}, \\ a &= \frac{3}{320\pi} \frac{f_4}{f_2} \ell^4 m_p'^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

$\ell$  ist eine Längenskala. Sie skaliert die Koordinaten der Raumzeitmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die beim Übergang zu einem physikalischen Funktional die physikalische Dimension einer Länge bekommen (s. auch Kap. 3). Es sind hier die folgenden Abkürzungen benutzt worden:

$$\begin{aligned} X &:= \frac{y}{x}, \\ y_q &:= 2(y_L^q)^2 + (y_R^u)^2 + (y_R^d)^2, \\ y_\ell &:= 2(y_L^\ell)^2 + (y_R^e)^2. \end{aligned}$$



Für die vollständige Planckmasse und kosmologische Konstante erhält man:

$$m_p^2 = m_p'^2 \left( 1 - \frac{2}{(4N+3\text{tr}X)} \frac{(\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*}))^2}{\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^d g^{d*})^2) + \text{tr}(X(g^e g^{e*})^2)} \right), \quad (6.16)$$

$$\Lambda_C = \frac{3m_p'^2}{4\pi} \Lambda^2 \frac{f_0}{f_2} \left( 1 + \frac{(f_4 - 2f_2)}{f_0(4N+3\text{tr}X)} \frac{(\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*}))^2}{\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^d g^{d*})^2) + \text{tr}(X(g^e g^{e*})^2)} \right). \quad (6.17)$$

Es sei angemerkt, dass die obige Form der Parameterbeziehungen von der in [Ca, Io, Ka, Sch] abweicht. In dem hier gewählten Fall wurde eine globale Konstante aus dem Funktional ausgeklammert, so dass der Faktor vor dem Term  $R$  gleich  $-\frac{m_p'^2}{16\pi}$  ist. In [Ca, Io, Ka, Sch] dagegen wurden die Parameter direkt identifiziert und die erste Beziehung von (6.14) zur Vereinfachung der Beziehungen für  $\lambda$  und  $\mu^2$  benützt.

## 6.1.4 Vergleich der Parameterbeziehungen

### Allgemeine Bemerkungen

Zum Vergleich seien nochmals, die Parameterbeziehungen des DEHYMH-Modells für den Fall ohne rechtshändige Neutrinos angegeben, wobei hier um der besseren Vergleichbarkeit Willen  $X \rightarrow 3X$  substituiert wurde.

Die DEHYMH-Parameterbeziehungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{3}{2\pi} a_2^2 \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 \frac{Ny_q + y_\ell \text{tr}X}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{3}{4\pi} a_2^2 \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 \frac{N + \text{tr}X}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{\pi} a_2^2 \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 \frac{N}{4N + 3\text{tr}X}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{6}{\pi} a_3^2 \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 \frac{\text{tr}(g^u g^{u*} + g^{d'} g^{d'^*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*})}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \lambda &= \frac{9}{2\pi} a_0^2 \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2 \frac{\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^{d'} g^{d'^*})^2) + \text{tr}(X(g^e g^{e*})^2)}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \mu^2 &= \frac{3}{\pi \ell_p^2} \frac{\text{tr}(g^u g^{u*} + g^{d'} g^{d'^*}) + \text{tr}(X g^e g^{e*})}{4N + 3\text{tr}X}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Vergleicht man nun die Parameterbeziehungen des Chamseddine-Connes-Modells mit denen des DEHYMH-Modells, so stellt man fest, wenn man die Verschiebung in der Planckmasse im Chamseddine-Connes-Modell nicht berücksichtigt, dass die Beziehungen in den Parametern  $g_1, g_2, g_3$  (s. (6.13)) und  $\lambda, \mu^2, 1$  (s. (6.14)) in den Ausdrücken, in denen die Yukawa-Kopplungsmatrizen und die Matrix  $X$  auftreten, die gleiche Struktur besitzen. Sie unterscheiden sich lediglich um Vorfaktoren, die sich aus den Modell-Parametern  $f_0, f_2, f_4, \frac{1}{\ell_p^2 \Lambda^2}$  beziehungsweise  $a_0, a_2, a_4, \left( \frac{\ell}{\ell_p} \right)^2$  zusammensetzen. Des Weiteren stellt

sich heraus, dass sich die Beziehungen in den Eichkopplungen in den beiden Modellen nur um einen globalen Faktor unterscheiden. Dies hat zur Folge, dass alle Größen, die sich aus Verhältnissen von Kopplungskonstanten bestimmen, in beiden Modellen gleich sein müssen. Dies sind insbesondere:

- Die Verhältnisse der Eichkopplungen  $g_i$  und ihrer Grenzwerte (s. (5.25)).
- Die Beziehung für den elektro-schwachen Winkel  $\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2}$ .
- Der kritische Skalenpunkte  $t_c$ , der aus Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen bestimmt wird (s. (5.1)).

Diese formale Ähnlichkeit in den Parameterbeziehungen in den beiden Modellen kann auf folgende Weise verständlich gemacht werden, wenn man die in den Wärmespurkoeffizienten  $a_{0Z}$ ,  $a_{2Z}$  und  $a_{4Z}$  vorkommenden Spuren  $\text{tr}_Z(\mathcal{V}^2)$ ,  $\text{tr}_Z(\mathcal{V})$  und  $\text{tr}_Z(F^{t\mu\nu} F_{\mu\nu}^t)$  betrachtet und diese Ausdrücke auswertet. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
\text{tr}_Z(\mathcal{V}^2) &= \frac{1}{16} R^2 \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z) + \frac{1}{4} \text{tr}_S(\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma}) \text{tr}_E(z F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \\
&\quad + \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z (\Phi \Phi^*)^2) + \frac{1}{2} R \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z \Phi \Phi^*) \\
&\quad + \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z [\nabla_\mu, \Phi] [\nabla^\mu, \Phi^*]), \\
\text{tr}_Z(F_{\mu\nu}^t F^{t\mu\nu}) &= \frac{1}{16} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\lambda\kappa} \text{tr}_S(\gamma^{\rho\sigma} \gamma^{\lambda\kappa}) \text{tr}_E(z) + \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})), \\
\text{tr}_Z(\mathcal{V}) &= -\frac{1}{8} R_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}_S(\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\rho\sigma}) \text{tr}_E(z) + \text{tr}_S(\mathbf{1}_S) \text{tr}_E(z \Phi \Phi^*). \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $Z = \mathbf{1}_S \otimes z$  und  $F_{\mu\nu}$  die Komponenten der durch die Fermionendarstellung  $\rho$  induzierten Krümmung auf  $E$ ;  $\nabla_\mu$  ist lokal gegeben durch:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \rho(A_\mu).$$

Im DEHYMH-Modell findet man Summanden der Form (s. Gl. 3.2, 3.1):

$$\begin{aligned}
&a'_0 \text{tr}_E(z' \phi^4), \\
&-a'_2 \text{tr}_E(z' F_{\mu\nu}^E F^{E\mu\nu}), \\
&a'_3 \text{tr}_E(z' ([\nabla_\mu^E, \phi] [\nabla^{E\mu}, \phi])), \\
&a'_4 \text{tr}_E(z' \phi^2). \tag{6.21}
\end{aligned}$$

Beim Auswerten der Spuren stellt sich heraus, dass man für die Spuren

$$\begin{aligned}
&\text{tr}_E(z' \phi^4), & \text{tr}_E(z F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}); \\
&\text{tr}_E(z' ([\nabla_\mu^E, \phi] [\nabla^{E\mu}, \phi])), & \text{tr}_E(z [\nabla_\mu, \Phi] [\nabla^\mu, \Phi^*]); \\
&\text{tr}_E(z' \phi^2), & \text{tr}_E(z (\Phi \Phi^*)^2); \\
&\text{tr}_E(z' \phi^2), & \text{tr}_E(z \Phi \Phi^*)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

bis auf einen Faktor 2 jeweils die selben Ausdrücke erhält. Der Faktor 2 erklärt sich dadurch, dass  $z'$  die Summe der Diagonalblöcke der Kommutanten im verdoppelten Bündel  $\tilde{\mathcal{E}}$  ist (Gl. (3.2), (3.1)).

Setzt man nun für  $F_{\mu\nu}^E$  ein (s. 4.1) und berücksichtigt, dass  $z'$  und  $z$  bis auf eine Parameter-Redefinition die gleiche Struktur haben, so findet man:

- Die Spuren über die Krümmungsterme  $F_{\mu\nu}$  und  $F_{\mu\nu}^E$  liefern in beiden Modellen das Gleiche, da in beiden Fällen die Krümmungen auf  $E$  von der Fermionendarstellung der Gruppe  $G := SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  induziert werden, die in beiden Modellen die Gleiche ist.
- Man erhält auch strukturell gleiche Ausdrücke für die Terme, in denen  $\phi$  beziehungsweise  $\Phi$  auftreten.  $\phi$  und  $\Phi$  sind zwar wie schon erwähnt leicht unterschiedlich definiert, aber die Spuren über Terme, in denen  $\Phi$  und  $\phi$  auftreten, liefern das Gleiche.

Diese Beobachtung erklärt in gewisser Weise die große Ähnlichkeit in den Parameterbeziehungen. Die unterschiedlichen relativen Vorfaktoren in den beiden Modellen rühren daher, dass in beiden Modellen die Beiträge der Spuren die auf der Spinor-Komponente wirken verschieden sind. Darüber hinaus gehen hier im Chamseddine-Connes-Modell noch die numerischen Faktoren der Koeffizienten der Wärmespur ein.

Verkürzt läßt sich sagen, dass die Ähnlichkeiten in den beiden Modellen daher kommen, dass für die internen Räume  $E$  im Wesentlichen die gleichen Spuren ausgewertet werden, während dagegen sich die Vorfaktoren aus Spuren über Endomorphismen der Spinor-Komponente von  $\mathcal{E}$  ergeben, die in beiden Modellen verschieden sind. Dies ist auch der Grund für das verschiedenartige Auftreten der Parameter  $f_0, f_2, f_4$  bzw.  $a_0, a_2, a_3$ .

### Vergleich bei Berücksichtigung von Quanten-Effekten

Will man den Einfluss von Quanten-Korrekturen bei beiden Modellen (eine analoge Untersuchung wie in Kapitel 5.2 ist für das Chamseddine-Connes Modell in [Ca,Io,Ka,Sch], [Ca,Io,Sch] gemacht worden) vergleichen, ist es sinnvoll, die Parameterbeziehungen für das Chamseddine-Connes Modell in der Top-Quark-Massen-Approximation zu betrachten (s. z.B. [Ca,Io,Ka,Sch]):

$$\begin{aligned}\Lambda_C &= \frac{3}{4\pi} \frac{\Lambda^2}{\ell_p'^2} \frac{f_0}{f_2} \left( 1 + \left( \frac{f_4 - 2f_2}{f_0} \right) \frac{1}{4N + 3\text{tr}X} \right), \\ \ell_p^2 &= \ell_p'^2 \left( 1 - \frac{2}{4N + 3\text{tr}X} \right)^{-1},\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{Ny_q + y_\ell \text{tr}X}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{N + \text{tr}X}{4N + 3\text{tr}X}, \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{3\pi} \frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{N}{4N + 3\text{tr}X},\end{aligned}\tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{g_t^2}{4N + 3\text{tr}X}, \\
\lambda &= \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} \frac{f_4}{f_2} \frac{g_t^4}{4N + 3\text{tr}X}, \\
\mu^2 &= \frac{3}{\pi} \frac{1}{\ell_p'^2} \frac{g_t^2}{4N + 3\text{tr}X},
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$a = \frac{3}{320\pi} \frac{f_4}{f_2} \frac{\ell^4}{\ell_p'^2}. \tag{6.26}$$

Untersucht man Beziehungen (6.23) so zeigt sich, dass das Vorzeichen auf der rechten Seite immer positiv ist, da gilt:

$$\frac{2}{4N + 3\text{tr}X} < 1, \quad N \geq 1, \quad \forall \text{tr}X > 0.$$

Dies hat zur Folge, dass das relative Vorzeichen zwischen dem Einstein-Hilbert-Term  $\frac{1}{16\pi\ell_p^2} \int *R$  und dem übrigen Term des Chamseddine-Connes Funktionals immer negativ ist. Dies ist auch im DEHYMH-Modell der Fall. Es sei noch kurz daran erinnert, dass in natürlichen Einheiten die Beziehung  $m_p = \frac{1}{\ell_p}$  zwischen der Planck-Masse und der Planck-Länge gilt.

Betrachtet man nun die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen (s. (6.24)), so stellt man fest, dass man diese durch die Parametersubstitution

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_p'^2 \Lambda^2} &\longrightarrow \left(\frac{\ell}{\ell_p}\right)^2, \\
\frac{1}{3} \frac{f_4}{f_2} &\longrightarrow a_2^2
\end{aligned}$$

in die Parameterbeziehungen für das DEHYMH-Modell überführen kann (s. Gl. (5.128), (5.129)). Dies erklärt, dass bei diesem Satz von Parameterbeziehungen die gleichen Phänomene auftreten. Insbesondere, wenn man die Renormierungsgruppengleichungen auf diese Parameterbeziehungen anwendet (s. Abschnitt 5.2.3), erhält man genau den gleichen kritischen Skalen-Punkt  $t_c$ .

Untersucht man nun die Parameterbeziehungen (6.25) am kritischen Skalen-Punkt  $t_c$ , so erhält man durch Division der ersten beiden Gleichungen:

$$\lambda = \frac{1}{2} g_t^2. \tag{6.27}$$

Wenn man die Beziehung für  $g_3$  ausnutzt, erhält man:

$$\lambda = \frac{N}{9} g_3^2. \tag{6.28}$$

Dies ist für  $N = 3$  genau die Beziehung, die sich auch in [Ca, Io, Ka, Sch] ergibt. Setzt man nun  $N = 3$  und setzt die obigen beiden Gleichungen gleich, so ergibt sich am kritischen Skalen-Punkt  $t_c$ :

$$g_3^2(t_c) = \frac{3}{2} g_t^2(t_c). \tag{6.29}$$

Bestimmt man nun mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen (5.75) und (5.76) die numerische Werte von  $g_t$  und  $g_3$  für am Skalenpunkt  $t_c$  zu den Anfangswerten (s. z.B. [Ca,Io,Ka,Sch])

$$g_3(t=0) = 1.218 \pm 0.0026, \quad g_t(t=0) = 0.70878 \pm 0.02639,$$

die den gemessenen Werten für  $g_3$  und  $g_t$  bei einer Energie von  $E = m_Z \approx 91.187$  GeV entsprechen (s. (5.1), (5.144)), so erhält man:

$$\begin{aligned} g_3^2(t_c) &= 0.4325535 \pm 0.000539, \\ \frac{3}{2}g_t^2(t_c) &= 0.2621575 \pm 0.040212. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die numerischen Werte sind auch bei Berücksichtigung des Fehlers nicht gleich, woraus folgt, dass das Chamseddine-Connes Modell mit den Renormierungsgruppengleichungen in der 1-Loop Approximation numerisch inkonsistent ist.

Betrachtet man die entsprechenden Beziehungen im DEHYMH-Modell:

$$\lambda = \frac{3}{4} \left( \frac{a_0}{a_3} \right)^2 g_t^2, \quad a_2^2 = 2 \left( \frac{g_t}{g_3} \right)^2 a_3^2,$$

beziehungsweise den Fall  $a_0 = a_3$ :

$$\lambda = \frac{3}{4} g_t^2, \quad a_2^2 = 2 \left( \frac{g_t}{g_3} \right)^2 a_3^2,$$

dann sind noch genügend freie Parameter vorhanden, um die numerische Konsistenz sicherzustellen.

Als Letztes soll noch kurz die Frage diskutiert werden, warum die Werte für die Higgs-Masse, wenn man sie aus der Beziehung für die Kopplung  $\lambda$  bestimmt, in beiden Modelle von gleicher Größenordnung ist. Zwar ist diese Betrachtung angesichts der numerischen Inkonsistenz des Chamseddine-Connes Modells nur bedingt sinnvoll, aber man stellt fest, dass die Werte für die Higgs-Masse

$$\begin{aligned} m_H &= 190 \pm 5 \text{ GeV (Chamseddine-Connes s. [Ca,Io,Ka,Sch],[Ca,Io,Sch])}, \\ m_H &= 188 \pm 15 \text{ GeV (DEHYMH s. Kap. 5.4.2)} \end{aligned}$$

im gleichen Bereich liegt, was darauf zurückzuführen ist, dass die Anfangswerte im gleichen Bereich liegen:

$$\begin{aligned} \lambda(t_c) &= \frac{1}{3} g_3^2(t_c) \approx 0.14418 \quad (\text{Chamseddine-Connes}), \\ \lambda(t_c) &= \frac{3}{4} g_t^2(t_c) \approx 0.13110 \quad (\text{DEHYMH}). \end{aligned}$$

### 6.1.5 Das Funktional $\text{Tr}f(\zeta \frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2})$

Im Chamseddine-Connes-Modell wird in seiner ursprünglichen Version die asymptotische Entwicklung der Spur von  $\text{Tr}f(\frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2})$  für  $\Lambda \rightarrow \infty$  verwendet (s.u.a. [Ch,Co],[Ca,Io,Ka,Sch]). Hierfür ergibt sich (s. [Ca,Io,Ka,Sch]):

$$\text{Tr}f\left(\frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathcal{M}} * (f_0 \Lambda^4 \text{tr}\phi_0 + f_2 \Lambda^2 \text{tr}\phi_2 + f_4 \text{tr}\phi_4 + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})), \quad (6.31)$$

mit

$$\begin{aligned}
f_0 &= \int_0^\infty du u f(u), \\
f_2 &= \int_0^\infty du f(u), \\
f_4 &= f(0),
\end{aligned} \tag{6.32}$$

wobei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine beliebige positive glatte Funktion ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &:= \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_H, \\
\phi_2 &:= \frac{1}{6} R \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_H - \mathcal{V}, \\
\phi_4 &:= \left( \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{180} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{180} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_H \\
&\quad + \frac{1}{12} F_{\mu\nu}^t F^{t\mu\nu} - \frac{1}{6} R \mathcal{V} + \frac{1}{2} \mathcal{V}^2 + \text{Oberfl. Terme.}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$\mathcal{V}$  ist hier der Potentialterm der Lichnerowicz-Zerlegung von  $\mathcal{D}^2$  (s. Kap. 2). Des Weiteren werden die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes beibehalten. Die Koeffizienten  $\phi_i$  sind die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes von  $\mathcal{D}^2$  (s. [Ca, Io, Ka, Sch]).

Es stellt sich aber heraus, dass die Parameterbeziehungen in diesem Modell zu Problemen führen. Wenn man z.B. die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen betrachtet (Man kann sie einfache aus den Beziehungen (6.18) gewinnen, indem man  $Z = \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_E$  setzt.), erhält man für den Fall  $N = 3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= C \frac{1}{2} (3y_q + y_\ell), \\
\frac{1}{g_2^2} &= C, \\
\frac{1}{g_3^2} &= C, \\
C &:= \frac{1}{15\pi} \frac{m_p'^2 f_4}{\Lambda^2 f_2}.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Im Fall  $y_q = \frac{11}{18}$ ,  $y_\ell = \frac{3}{2}$  ergibt sich für die obigen Kopplungen die Beziehung:

$$\frac{1}{g_3^2} = \frac{1}{g_2^2} = \frac{5}{3} \frac{1}{g_1^2}. \tag{6.35}$$

Es zeigt sich aber, dass diese Beziehung nicht mit den gemessenen Werten für die Eichkopplungen bzw. mit Quanten-Korrekturen verträglich ist (s. z.B. [Ca, Io, Ka, Sch], oder Ende des Abschnitts).

Um dieses Problem zu lösen, wurde eine so genannte *Soft*-Wirkung eingeführt (s. z.B. [Ca, Io, Ka, Sch]), in der der im bosonischen Funktional auftretende Dirac-Operator  $\mathcal{D}^2$  durch  $\zeta \mathcal{D}^2$  ersetzt wird, wobei  $\zeta$  ein Element der zugehörigen Kommutanten ist. Die bosonische Wirkung wird dann durch die asymptotische Entwicklung des Funktionals

$$\text{Tr} f \left( \zeta \frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2} \right),$$

erzeugt. Es zeigt sich allerdings, dass dieses Funktional nicht die Ausdrücke in den Parameterbeziehungen liefert, wie sie die Gleichungen (6.13), (6.14), (6.15) gegeben sind, und die in [Ca, Io, Ka, Sch] und [Ca, Io, Sch] verwendet werden.

Dies lässt sich verstehen, wenn man annimmt, dass  $\zeta$  selbstadjungiert ist, was im Standardmodell im Chamseddine-Connes Zugang erfüllt ist. Dann ist  $\zeta \mathcal{D}^2$  ein positiver, elliptischer Pseudodifferentialoperator, wenn  $\mathcal{D}^2$  positiv ist, und für seine asymptotische Wärmespurentwicklung gilt folgendes Lemma (s. [Tol]):

**Lemma 6.1.** *Sei  $(\mathcal{D}, \rho, G)$  ein Dirac-Tripel mit einem passenden  $\mathbb{Z}_2$ -graduierten, hermiteschen, gewisteten Spinor-Bündel  $\mathcal{E}$  über einer kompakten, randlosen, Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  gerader Dimension  $n$ . Ferner sei  $\zeta$  ein Element der zum Dirac-Tripel gehörenden Kommutanten, das selbstadjungiert ist. Ferner sei  $\zeta \mathcal{D}^2$  positiv. Dann gilt:*

$$\mathrm{Tr} e^{-t\zeta \mathcal{D}^2} \sim \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{*tr}_{\mathcal{E}} \left( \zeta^{\frac{k-n}{2}} \phi_k(\mathcal{D}^2) \right), \quad t \rightarrow 0+. \quad (6.36)$$

Die  $\phi_k$  sind durch die Gleichungen (6.33) gegeben.

Der Beweis findet sich in [Tol]. Er wird noch einmal wiederholt, da er anschaulich zeigt, wie die Potenzen von  $\zeta$  entstehen, die für die späteren Betrachtungen entscheidend sind.

**Beweis:** Nach den Kommentaren in Kapitel 3, beziehungsweise in [Ack], [Tol] wurde gezeigt, dass  $\zeta$  ein konstantes Spektrum besitzt. Sei nun  $\mathrm{spec}(\zeta) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Da  $\zeta$  selbstadjungiert ist, lässt sich  $\zeta$  diagonalisieren, und aufgrund der Konstanz des Spektrums zerfällt  $\mathcal{E}$  in Eigenbündel von  $\zeta$ :

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{E}_i, \quad \mathcal{E}_i := \ker(\zeta - \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{E}}).$$

Da  $[\mathcal{D}, \zeta] = 0$  gilt, wird diese Zerlegung von  $\mathcal{D}^2$  respektiert. Seien nun

$$\zeta_i := \zeta |_{\mathcal{E}_i} = \lambda_i \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i}, \quad \mathcal{D}_i := \mathcal{D} |_{\mathcal{E}_i},$$

so ergibt sich:

$$\mathrm{Tr} e^{-t\zeta \mathcal{D}^2} = \sum_{i=1}^m e^{-t\zeta_i \mathcal{D}_i^2} = \sum_{i=1}^m e^{-t\lambda_i \mathcal{D}_i^2}.$$

Mit der Wärmespurentwicklung erhält man auf dem Unterbündel  $\mathcal{E}_i$ :

$$\mathrm{Tr} e^{-t\lambda_i \mathcal{D}_i^2} = \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} \lambda_i^{\frac{k-n}{2}} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{*tr}_{\mathcal{E}_i} \phi_k(\mathcal{D}_i^2).$$

Damit ergibt sich insgesamt für  $t \rightarrow 0+$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} e^{-t\zeta \mathcal{D}^2} &\sim \sum_{i=1}^m \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} \lambda_i^{\frac{k-n}{2}} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{*tr}_{\mathcal{E}_i} \phi_k(\mathcal{D}_i^2) \\ &= \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{*} \sum_{i=1}^m \mathrm{tr}_{\mathcal{E}_i} (\lambda_i^{\frac{k-n}{2}} \phi_k(\mathcal{D}_i^2)) \\ &= \sum_{k \geq 0} t^{\frac{k-n}{2}} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{*tr}_{\mathcal{E}} (\zeta^{\frac{k-n}{2}} \phi_k(\mathcal{D}^2)), \end{aligned}$$

was die Behauptung ist.  $\square$

Mit Hilfe des obigen Lemmas erhält man für das bosonische Funktional:

$$S_{\Lambda, \zeta} := \text{Tr} f \left( \zeta \frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda} \right) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathcal{M}} * (\Lambda^4 f_0 \tilde{a}_0 + \Lambda^2 f_2 \tilde{a}_2 + f_4 \tilde{a}_4 + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})) \quad (6.37)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &:= \text{tr}_{\mathcal{E}}(\zeta^2), \\ \tilde{a}_2 &:= \text{tr}_{\mathcal{E}}(\zeta \phi_2(\mathcal{D}^2)), \\ \tilde{a}_4 &:= \text{tr}_{\mathcal{E}}(\phi_4(\mathcal{D}^2)). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Es werden hier die gleichen Konventionen für die Bezeichnungen benutzt wie im vorangegangenen Abschnitt. Wertet man nun die Koeffizienten  $\tilde{a}_i$ ,  $i = 0, 2, 4$ , für das Standardmodell aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= -\frac{3}{4} N G_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &\quad + \frac{3}{2} R (3\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(g^e g^{e*})) |\varphi|^2 \\ &\quad - \frac{2}{3} N (4\text{tr}(C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}) + 4\text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) + (3y_q + y_\ell) B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) \\ &\quad - 4(3\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^d g^{d*})^2) + \text{tr}((g^e g^{e*})^2)) |\varphi|^4 \\ &\quad + 4(3\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(g^e g^{e*})) (\mathcal{D}_\mu \varphi) (\mathcal{D}^\mu \varphi)^*, \\ \tilde{a}_2 &= -\frac{1}{3} (4Nx + 3\text{tr}y) R \\ &\quad - 8(x\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(y g^e g^{e*})) |\varphi|^2, \\ \tilde{a}_4 &= \frac{4}{3} (4x^2 + 9\text{tr}(y^2)). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Identifiziert man die Parameter und normiert wie im vorangegangenen Abschnitt, so ergibt sich für die Parameterbeziehungen:

$$\Lambda'_C = \frac{\lambda^2 f_0}{4\pi \ell_p'^2 f_2} \frac{4Nx^2 + 9\text{tr}y^2}{4Nx + 3\text{tr}y}, \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{f_4 N (3y_q + y_\ell)}{2\pi \ell_p'^2 \Lambda^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{f_4 N}{\pi \ell_p'^2 \Lambda^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)}, \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{f_4 N}{\pi \ell_p'^2 \Lambda^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{2} \frac{f_4}{\pi \ell_p'^2 \Lambda^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)} (3\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(g^e g^{e*})), \\ \lambda &= \frac{3}{4} \frac{f_4}{\pi \ell_p'^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)} (3\text{tr}((g^u g^{u*})^2 + (g^d g^{d*})^2) + \text{tr}((g^e g^{e*})^2)), \\ \mu^2 &= \frac{3f_4}{\pi \ell_p'^2 f_2 (4Nx + \text{tr}y)} (x\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(y g^e g^{e*})), \end{aligned} \quad (6.42)$$



$$\begin{aligned}
a &= \frac{9Nf_4\ell^4}{64\pi\ell_p'^2\Lambda^2(4Nx + \text{tr}y)}, \\
1 &= \frac{27f_4}{32\pi\ell_p'^2\Lambda^2f_2} \frac{1}{4Nx + \text{tr}y} (3\text{tr}(g^u g^{u*} + g^d g^{d*}) + \text{tr}(g^e g^{e*})). \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen, so erhält man durch sukzessives Dividieren der Gleichungen:

$$\frac{1}{g_3^2} = \frac{1}{g_2^2} = \frac{1}{2} (3y_q + y_\ell) \frac{1}{g_1^2}. \quad (6.44)$$

Setzt man nun für  $y_q = \frac{11}{18}$ ,  $y_\ell = \frac{3}{2}$  ein, so folgt:

$$\frac{1}{g_3^2} = \frac{1}{g_2^2} = \frac{5}{3} \frac{1}{g_1^2}. \quad (6.45)$$

Dass diese Beziehungen zu Inkonsistenzen führen, sieht man, wenn man in die Gleichungen die Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen für die Eichkopplungen (5.78) einsetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t &= A_2 + \frac{19}{48\pi^2}t, \\
\frac{5}{3}(A_1 - \frac{41}{48\pi^2}t) &= A_3 + \frac{7}{8\pi^2}t \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Löst man nun nach  $t$  auf, so erhält man:

$$\frac{5}{3}A_1 - \frac{331}{69}A_2 + \frac{262}{69}A_3 = 0 \quad (6.47)$$

mit  $A_i = \frac{1}{g_i^2(E=m_Z)}$ . Numerisch ergibt sich mit den Werten aus Tabelle 5.1 für die linke Seite:

$$4.27 \pm 2.59 \neq 0. \quad (6.48)$$

Womit sich zeigt, dass auch dieser Zugang zu numerischen Inkonsistenzen führt.

## 6.2 Vergleich Connes-Lott/DEHYMH

In Folgenden werden nun der Connes-Lott Zugang zum Standardmodell rekapituliert und seine Konsequenzen mit denen des DEHYMH-Modells verglichen.

### 6.2.1 Nichtkommutative Modelle

Der Startpunkt für ein nichtkommutatives Modell und somit auch für ein Connes-Lott-Modell ist eine reelle, assoziative, unitale Involutionalgebra  $\mathcal{A}$  und ein aus vier (sic!) Objekten bestehendes reelles, spektrales Tripel  $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \chi, J)$  mit den Eigenschaften (s. [Ca, Io, Sch]):

- $\mathcal{H}$  ist ein Hilbert-Raum, der eine treue Darstellung  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$  trägt.
- $\chi$  ist ein Graduierungsoperator auf  $\mathcal{H}$ .
- $J$  ist eine reelle Struktur auf  $\mathcal{H}$ .
- $\mathcal{D}$  ist ein so genannter „Dirac-Operator“ .

Hier sollte erwähnt werden, dass der „Dirac-Operator“  $\mathcal{D}$  a priori nicht unbedingt ein Dirac-Operator in dem in dieser Arbeit verwendeten Sinn sein muss. Es zeigt sich aber, dass dieser Operator im Fall des Standardmodells ein verallgemeinerter Dirac-Operator ist. Darüber hinaus werden für das reelle spektrale Tripel noch folgende Eigenschaften gefordert:

- $\forall a, a' \in \mathcal{A} \quad [\rho(a), J\rho(a')J^{-1}] = 0.$
- $\mathcal{D}\chi + \chi\mathcal{D} = 0.$
- $\mathcal{D}J - J\mathcal{D} = 0.$
- $\forall a \in \mathcal{A}$  ist  $[\mathcal{D}, \rho(a)]$  beschränkt.
- $\forall a, a' \in \mathcal{A} : [[\mathcal{D}, \rho(a)], J\rho(a')J^{-1}] = 0.$

Das Ziel ist nun, mit Hilfe des reellen spektralen Tripels eine Differentialalgebra  $(\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}, d_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit einem Skalarprodukt zu konstruieren, mit deren Hilfe sich dann so-genannte nichtkommutative Yang-Mills Theorien formulieren lassen. Im Folgenden wird das 5-Tupel  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \chi, J)$  als *NCG-Daten* bezeichnet.

#### Die Konstruktion von $(\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}, d_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Die Konstruktion der Differentialalgebra  $(\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}, d_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  läuft im Wesentlichen über drei Schritte (ausführliche Darstellungen über dieses Verfahrens finden sich u.a. in [Sch, Zy], [Ca, Io, Sch], [Tol2]): Der Konstruktion der universellen Einhüllenden  $(\hat{\Omega}\mathcal{A}, \delta)$ , die Konstruktion einer Darstellung von  $(\hat{\Omega}\mathcal{A}, \delta)$  auf  $\mathcal{H}$  mittels der Darstellung  $\rho$  als Operatoralgebra und die Wahl eines Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$ .

**Die universelle Einhüllende** Die universelle Einhüllende  $(\hat{\Omega}\mathcal{A}, \delta)$  ist definiert durch (s. auch [Sch,Zy], [Ca,Io,Sch]) die formalen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}\mathcal{A} &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \hat{\Omega}\mathcal{A}^n, \\ \hat{\Omega}^0\mathcal{A} &:= \mathcal{A}, \\ \hat{\Omega}^n\mathcal{A} &:= \left\{ \sum_j a_0^j \delta a_1^j \cdots \delta a_n^j \mid a_q^j \in \mathcal{A}, \quad 0 \leq q \leq n \right\}.\end{aligned}\quad (6.49)$$

Das Differential  $\delta$  besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\delta(a_0 \delta a_1 \cdots \delta a_p) &:= \delta a_0 \delta a_1 \cdots \delta a_p, \\ \delta 1 &:= 0, \\ \delta^2 &:= 0, \\ \forall a, a' \in \hat{\Omega}\mathcal{A} \quad \delta(aa') &:= (\delta a)a' + a\delta a'.\end{aligned}\quad (6.50)$$

Durch lineare Fortsetzung wird  $\delta$  auf ganz  $\hat{\Omega}\mathcal{A}$  festgelegt. Ferner wird eine Involution  $\cdot^*$  auf  $\hat{\Omega}\mathcal{A}$  durch die Involution von  $\mathcal{A}$  induziert:

$$\begin{aligned}\forall a, b \in \hat{\Omega}\mathcal{A} \quad (ab)^* &:= b^* a^*, \\ (\delta a)^* &:= \delta a^* := \delta(a^*).\end{aligned}\quad (6.51)$$

Alles weitere ergibt sich durch lineare Fortsetzung. Konstruktionsbedingt ist  $(\hat{\Omega}\mathcal{A}, \delta)$  immer eine unendlich dimensionale Algebra mit trivialer Kohomologie und in natürlicher Weise  $\mathbb{Z}$ -graduiert (s. [Sch,Zy]).

**Die Konstruktion von  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$**  Die Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\pi} : \hat{\Omega}\mathcal{A} &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{H}), \quad \text{definiert durch} \\ a_0 \delta a_1 \cdots \delta a_p &\mapsto (-i)^p \rho(a_0) [\mathcal{D}, \rho(a_1)] \cdots [\mathcal{D}, \rho(a_p)].\end{aligned}\quad (6.52)$$

liefert per Konstruktion eine Darstellung von  $\hat{\Omega}\mathcal{A}$  als involutive Algebra, aber nicht als Differentialalgebra. Um eine Darstellung als Differentialalgebra zu erhalten, muss man von  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A})$  zur Quotientenstruktur  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A})/\mathcal{J}$  übergehen, wobei  $\mathcal{J}$  das zweiseitige Differentialideal ist, das definiert ist durch:

$$\mathcal{J} := \hat{\pi}(\delta \ker \hat{\pi}) =: \bigoplus_p \mathcal{J}^p, \quad \mathcal{J}^p := \hat{\pi}(\delta(\ker \hat{\pi})^{p-1}).\quad (6.53)$$

Die abschließende Algebra ist dann:

$$\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A} := \hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A})/\mathcal{J},\quad (6.54)$$

mit dem Differential

$$d_{\mathcal{D}} := [\hat{\pi}(\delta \cdot)],\quad (6.55)$$

wobei  $[\cdot]$  die Äquivalenzklassen bezeichnet.  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  ist wie  $\hat{\Omega}\mathcal{A}$  in natürlicher Weise  $\mathbb{Z}$ -graduiert. Da  $\rho$  eine treue Darstellung ist, gilt darüber hinaus:

$$\Omega_{\mathcal{D}}^0\mathcal{A} \cong \rho(\mathcal{A}), \quad \Omega_{\mathcal{D}}^1\mathcal{A} \cong \hat{\pi}(\hat{\Omega}^1\mathcal{A}).\quad (6.56)$$

**Wahl des Skalarproduktes** Diese Wahl ist im Allgemeinen nicht eindeutig, beziehungsweise die Existenz ist nicht sichergestellt. Es zeigt sich aber, dass in so genannten *fast kommutativen* Modellen, zu denen auch die Connes-Lott Modelle gehören, ein nichtkommutatives Analogon zu einem Integral existiert. Dies erlaubt die Konstruktion eines Skalarproduktes (s. [Tol2]). Wenn man nun davon ausgeht, dass ein Skalarprodukt auf  $\text{End}(\mathcal{H})$  bzw. auf  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A})$  existiert, so lässt sich  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  in  $\text{End}(\mathcal{H})$  einbetten, indem man jeder Äquivalenzklasse von  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  den Repräsentanten im orthogonalen Komplement  $\mathcal{J}^{\perp}$  von  $\mathcal{J}$  zuordnet. Im Folgenden wird  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  stillschweigend mit seinem Bild in  $\text{End}(\mathcal{H})$  identifiziert.

### Geometrie auf $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$

Sei  $(\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}, d_{\mathcal{D}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine nach dem vorhergehend beschriebenen Verfahren aus den NCG-Daten  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \chi, J)$  gewonnene Differentialalgebra mit Skalarprodukt.

Durch die Algebra  $\mathcal{A}$  ist in natürlicher Weise eine Gruppe  $G$  gegeben:

$$G := \{a \in \mathcal{A} \mid aa^* = e\}, \quad (6.57)$$

wobei  $e$  das Eins-Element vom  $\mathcal{A}$  ist. Wenn man nun die Menge der anti-unitären Elemente von  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  von Grad eins betrachtet:

$$\mathfrak{A} := \{A \in \Omega_{\mathcal{D}}^1\mathcal{A} \mid A^* = -A\} \quad (6.58)$$

und darauf eine Aktion der Gruppe  $G$  definiert:

$$A \in \mathfrak{A}, \quad g \in G \quad A^g := \rho(g)A\rho(g)^{-1} + \rho(g)d_{\mathcal{D}}\rho(g)^{-1}, \quad (6.59)$$

dann transformieren die Elemente von  $\mathfrak{A}$  formal wie der lineare Anteil eines Zusammenhangs. Es lässt sich nun eine *Krümmung* definieren:

$$C := d_{\mathcal{D}}A + AA, \quad A \in \mathfrak{A}. \quad (6.60)$$

Diese besitzt nach Konstruktion ein homogenes Transformationsverhalten:

$$C^g = \rho(g)C\rho(g)^{-1}. \quad (6.61)$$

Mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A}$  lässt sich nun eine *nichtkommutative Yang-Mills-Wirkung* definieren:

$$\mathcal{I}_{n.k.YM} := \langle C, C \rangle. \quad (6.62)$$

Des Weiteren lässt sich ein Analogon zur Dirac-Wirkung definieren, denn auf  $\mathcal{H}$  ist natürlicher Weise eine Aktion von  $G$  gegeben durch:

$$\psi \in \mathcal{H}, \quad g \in G \quad \psi^g := \rho(g)\psi. \quad (6.63)$$

Damit lässt sich der „Dirac-Operator“  $\mathcal{D}$  durch Hinzufügen so genannter *Fluktuationen* zu einen reellen, kovarianten Dirac-Operator  $\mathcal{D}_{cov}$  machen (s. [Ca, Io, Sch]):

$$\mathcal{D}_{cov} := \mathcal{D} + A + JAJ^{-1}, \quad A \in \mathfrak{A}. \quad (6.64)$$

Diese Konstruktion stellt später in den Connes-Lott-Modellen sicher, dass der so gewonnene Operator homogen transformiert und reell ist.

Sei nun  $(\cdot, \cdot)$  das innere Produkt von  $\mathcal{H}$ , dann ist die nichtkommutative Dirac-Wirkung gegeben durch:

$$\mathcal{I}_{n.k.D} := (\psi, \mathcal{D}_{cov}\psi), \quad \psi \in \mathcal{H}. \quad (6.65)$$

## Connes-Lott-Modelle

Connes-Lott-Modelle sind eine Klasse nichtkommutativer Modelle, bei denen die NCG-Daten von einem Tensorprodukt zweier NCG-Datensätze gebildet wird. Sei nun

$$(\mathcal{A}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{D}_t, \chi_t, J_t) \quad (6.66)$$

ein NCG-Datensatz eines Connes-Lott-Modells mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &:= \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}_f, \\ \mathcal{H}_t &:= \mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_f, \\ \mathcal{D}_t &:= \not{D} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \gamma_5 \otimes \mathcal{D}_f, \\ \chi_t &:= \gamma_5 \otimes \chi_f, \\ J_t &:= C \otimes J_f. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Hierbei bildet  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \not{D}, \gamma_5, C)$  die NCG-Daten einer Spin-Mannigfaltigkeit:

$\mathcal{F} = C^\infty(\mathcal{M})$  ist die kommutative Algebra der komplexwertigen Funktionen auf einer vierdimensionalen Spin-Mannigfaltigkeit.  $\mathcal{S}$  sei die Menge der Schnitte in ein gewähltes Spinor-Bündel über  $\mathcal{M}$ .  $\not{D}$  sei der vom Levi-Civita-Zusammenhang induzierte Dirac-Operator auf  $\mathcal{S}$ .  $\gamma_5$  bezeichne das kanonische Element der zum Spinor-Bündel über  $\mathcal{M}$  gehörenden Clifford-Algebra, und  $C$  sei die Ladungskonjugation auf  $\mathcal{S}$ , die durch eine reelle Struktur auf  $\mathcal{S}$  gegeben ist. Die Darstellung  $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \text{End}(\mathcal{S})$  sei durch punktweise Multiplikation gegeben.

Es sollte bemerkt werden, dass die NCG-Daten  $(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \not{D}, \gamma_5, C)$  zu einer kommutativen, unendlich dimensionalen Algebra gehört und  $\Omega_{\not{D}}\mathcal{F}$  gerade isomorph zur de Rham-Algebra von  $\mathcal{M}$  ist ([Sch,Zy], [Tol2]).

Der zweite NCG-Datensatz  $(\mathcal{A}_f, \mathcal{H}_f, \mathcal{D}_f, \chi_f, J_f)$  gehört zu einer im Allgemeinen nicht kommutativen Algebra über einem endlich dimensional Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_f$ . Die zu  $(\mathcal{A}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{D}_t, \chi_t, J_t)$  gehörende Geometrie wird auch als *fast kommutative Geometrie* bezeichnet.

Einer der nun entscheidenden Punkte bei der Konstruktion von Connes-Lott-Modellen auf dem Raum  $\Omega_{\mathcal{D}_t}\mathcal{A}_t$  ist die Wahl eines Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  auf  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A}_t)$ . Dieses erlaubt die Einbettung von  $\Omega_{\mathcal{D}_t}\mathcal{A}_t$  in  $\text{End}(\mathcal{H}_t)$  und macht des Weiteren die Definition von Wirkungen möglich.

Für den Fall von fast kommutativen Modellen ist ein natürliches Skalarprodukt auf  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A}_t)$  gegeben durch (s. [Ca, Io, Sch]):

$$\langle \omega, \kappa \rangle := \text{Re tr}_{Dix}(\omega^* \kappa | \mathcal{D}_t |^{-\dim \mathcal{M}}), \quad \omega, \kappa \in \hat{\pi}(\hat{\Omega}^p \mathcal{A}_t). \quad (6.68)$$

Die direkten Summanden von  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A}_t)$  werden als orthogonal erklärt.  $\text{tr}_{Dix}$  bezeichnet hier die *Dixmier-Spur* (s. [Tol2]). Die in dem hiesigen Zusammenhang wichtige Eigenschaft der Dixmier-Spur ist, dass für die Klasse der Connes-Lott Modelle gilt (s. [Sch,Zy], [Ca, Io, Sch]):

$$\langle \omega, \kappa \rangle \sim \text{Re} \int_{\mathcal{M}} * \text{tr}(\omega^* \kappa), \quad \omega, \kappa \in \hat{\pi}(\hat{\Omega}^p \mathcal{A}_t). \quad (6.69)$$

Es stellt sich darüber hinaus heraus, dass es daneben noch ein weiteres Skalarprodukt auf  $\hat{\pi}(\hat{\Omega}\mathcal{A}_t)$  gibt, welches von Betrachtungen vom Chamseddine-

Connes Zugang her motiviert ist (s. [Ca,Io,Sch]):

$$(\omega, \kappa) := \frac{1}{32\pi^2} \operatorname{Re} \int_{\mathcal{M}} * \operatorname{tr}((\omega + J_t \omega J_t^{-1})^* (\kappa + J_t \kappa J_t^{-1})), \quad \omega, \kappa \in \hat{\pi}(\hat{\Omega}^p \mathcal{A}_t). \quad (6.70)$$

Diese Skalarprodukte werden mit Kommutanten  $\zeta = \mathbf{1}_S \otimes z$ ,  $\zeta' = \mathbf{1}_S \otimes z'$  modifiziert.  $z, z'$  sind positive Operatoren auf  $\mathcal{H}_f$  und haben dabei die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{A}: \quad 0 &= [\rho_f(g), z] = [J_f \rho_f(g) J_f^{-1}, z] = [\mathcal{D}_f, z] = [\chi_f, z], \\ 0 &= [\rho_f(g), z'] = [J_f \rho_f(g) J_f^{-1}, z'] = [\mathcal{D}_f, z'] = [\chi_f, z']. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Als endgültiges Skalarprodukt auf  $\hat{\pi}(\hat{\Omega} \mathcal{A}_t)$  wird definiert:

$$\begin{aligned} \langle \omega, \kappa \rangle_{z, z'} &:= \frac{1}{32\pi^2} \operatorname{Re} \int \left( \operatorname{tr}(z \omega^* \kappa) + \operatorname{tr}(z' (\omega + J_f \omega J_f^{-1})^* (\kappa + J_f \kappa J_f^{-1})) \right), \\ (\omega, \kappa)_{z, z'} &:= \operatorname{tr}(z \omega^* \kappa) + \operatorname{tr}(z' (\omega + J_f \omega J_f^{-1})^* (\kappa + J_f \kappa J_f^{-1})). \end{aligned} \quad (6.72)$$

### Struktur der Wirkung

Seien nun  $(\mathcal{A}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{D}_t, \chi_t, J_t)$  die NCG-Daten eines Connes-Lott Modells mit

$$\begin{aligned} A_t \in \Omega_{\mathcal{D}_t}^1 \mathcal{A}_t, \quad A_t &:= A \otimes H, \\ A &\in \Omega_{\mathcal{D}_f}^1 \mathcal{F} \otimes \Omega_{\mathcal{D}_f}^0 \mathcal{A}_f, \quad H \in \Omega_{\mathcal{D}_f}^0 \mathcal{F} \otimes \Omega_{\mathcal{D}_t}^1 \mathcal{A}_f \cong \Omega^1(\mathcal{M}, \mathcal{A}_f), \end{aligned} \quad (6.73)$$

dann erhält man für die totale Krümmung (s. [Sch,Zy], [Ca,Io,Sch]):

$$\begin{aligned} F_t &= \delta_t A_t + A_t^2 \in \Omega_{\mathcal{D}_t}^2 \mathcal{A}, \\ F_t &= F + (C - \alpha C) - D\Phi \gamma_5, \\ F &:= dA + A^2 \in \Omega^2(\mathcal{M}, \mathfrak{g}), \quad C := \delta_f H + H^2 \in \Omega^0(\mathcal{M}, \Omega_{\mathcal{D}_f}^2 \mathcal{A}_f). \end{aligned} \quad (6.74)$$

In diesem Fall sei  $\mathfrak{g}$  die Lie-Algebra von  $G$  und

$$\Phi := H - i\mathcal{D}_f, \quad D\Phi := d\Phi + [\rho_f(A), \Phi].$$

Des Weiteren ist  $\alpha$  eine lineare Abbildung, die die Eigenschaften

$$\begin{aligned} (r, C - \alpha C)_{z, z'} &= 0 \quad \forall r \in \rho(\mathcal{A}_f), \\ (j, C - \alpha C)_{z, z'} &= 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}_f^2 \end{aligned} \quad (6.75)$$

besitzt, wodurch  $\alpha$  festgelegt ist (s. [Sch,Zy], [Ca,Io,Sch]).

Für die nichtkommutative Yang-Mills Wirkung ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n.k.YM} &= \frac{1}{8\pi^2} \left( \int_{\mathcal{M}} *(F, F)_{z, z'} + (D\Phi, D\Phi)_{z, z'} + V(H) \right), \\ V(H) &:= (C - \alpha C, C - \alpha C)_{z, z'}. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Das Funktional zerfällt in drei Teile, wobei der erste Term der bekannten Yang-Mills-Wirkung entspricht. Der zweite Term lässt sich als kinetischer Term des Feldes  $H$  oder  $\Phi$  auffassen, der letzte Term ist offensichtlich eine Funktion

in  $H$ . Die letzten beiden Terme liefern im Standardmodell das Funktional für das Higgs-Feld.

Für die fermionische Wirkung ergibt sich in dieser Zerlegung:

$$\mathcal{I}_{n.k.f} = (\psi, (\not{\partial} + \mathbf{1}_S \otimes \rho_f(\not{A}) + J_t \mathbf{1}_S \otimes \rho_f(\not{A}) J_t^{-1} + \Phi \gamma_5 + J_t \Phi \gamma_5 J_t^{-1}) \psi). \quad (6.77)$$

$(\cdot, \cdot)$  ist das innere Produkt auf  $\mathcal{H}_t$ ,  $\not{A}$  die Quantisierung von  $A$  und  $\rho_f : \mathcal{A}_f \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_f)$  die Darstellung der endlich dimensionalen Algebra  $\mathcal{A}_f$ .

### Das Standardmodell als Connes-Lott-Modell

Nach dem vorhergehend Gesagten reicht es, um das Connes-Lott-Modell endgültig festzulegen, die Daten der endlich dimensionalen NCG-Daten anzugeben.

Für das Standardmodell sind diese (s. [Ca, Io, Sch]):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f &:= \mathbb{H} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C}), \\ \mathcal{H}_f &:= (\mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R) \oplus (\mathcal{H}_L^c \oplus \mathcal{H}_R^c), \\ \mathcal{H}_L &:= (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}) =: \mathcal{H}_L^c, \\ \mathcal{H}_R &:= ((\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^3) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}) =: \mathcal{H}_R^c. \end{aligned} \quad (6.78)$$

$\mathbb{H}$  bezeichnet hier die Quaternionen. Die Darstellung  $\rho_f$  ist für  $(a, b, c) \in \mathcal{A}_f$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \rho_f(a, b, c) &:= \begin{pmatrix} \rho_w(a, b) & 0 \\ 0 & \rho_s(b, c) \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \rho_{wZ}(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{wR}(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{sL}(b, c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{sR}(b, c) \end{pmatrix}, \\ \rho_{wL}(a) &:= \begin{pmatrix} a \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & a \otimes \mathbf{1}_N \end{pmatrix}, \\ \rho_{wR}(b) &:= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & \bar{b} \mathbf{1}_N \end{pmatrix}, \\ \rho_{sL}(b, c) &:= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes c & 0 \\ 0 & \bar{b} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \end{pmatrix}, \\ \rho_{sR}(b, c) &:= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes c & \\ 0 & \bar{b} \mathbf{1}_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Weiter seien

$$\begin{aligned} J_f &:= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{15N} \\ \mathbf{1}_{15N} & 0 \end{pmatrix} \circ c.c., \\ \chi_f &:= \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{8N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{7N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1}_{8N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_{7N} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

c.c. steht hier für die komplexe Konjugation. Der Dirac-Operator ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f &:= \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{M} \\ 0 & 0 & \overline{M^*} & 0 \end{pmatrix}, \\ M &:= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ 0 & g_d \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ g_e \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

$g_u, g_d, g_e$  sind hier in diesem Zusammenhang Yukawa-Kopplungs-Matrizen.

Für die Kommutanten  $z, z'$  ergibt sich hier:

$$\begin{aligned} z &:= \begin{pmatrix} z_w & 0 \\ 0 & z_s \end{pmatrix}, \\ z_w &:= \begin{pmatrix} \frac{x}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \otimes Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{pmatrix}, \\ z_s &:= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \otimes \tilde{Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{x}}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{Y} \end{pmatrix}, \\ Y &:= \text{diag}(y_1, \dots, y_N), \quad \tilde{Y} := \text{diag}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N), \\ & \quad y_i, \tilde{y}_i, x, \tilde{x} > 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Und weiter:

$$\begin{aligned} z' &:= \begin{pmatrix} z'_w & 0 \\ 0 & z'_s \end{pmatrix}, \\ z'_w &= z'_s := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{x'}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \otimes Y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x'}{3} \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y' \end{pmatrix}, \\ Y' &:= \text{diag}(y'_1, \dots, y'_N), \quad y'_i, x' > 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.83)$$

An dieser Stelle lassen sich schon einige wesentliche konzeptionelle Unterschiede zwischen dem Connes-Lott- und den DEHYMH-Modell bzw. dem Chamseddine-Connes-Modell feststellen:

- Beim Chamseddine-Connes- wie auch im DEHYMH-Modell werden sowohl die bosonischen als auch die fermionischen Wirkungsfunktionale aus einem Dirac-Operator konstruiert. Beim Connes-Lott-Modell wird das bosonische Funktional aus dem Quadrat von verallgemeinerten Krümmungen des nichtkommutativen Raumes  $\Omega_{\mathcal{D}_t} \mathcal{A}_t$  gewonnen und nicht wie in den beiden anderen Modellen direkt aus einem Dirac-Operator. Bei der Konstruktion von Connes-Lott Modellen geht zwar der so genannte *totale*



*Dirac-Operator*  $\mathcal{D}_t = \not{D} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \gamma_5 \otimes \mathcal{D}_f$  ein, aber nur mittelbar bei der Definition der Differentiale. Der Dirac-Operator, der die Fermionen-Wirkung definiert, ergibt sich durch Addition so genannter Fluktuationen, so dass der entstehenden Dirac-Operator  $\mathcal{D}_{t,cov}$   $J_t$ -reell ist und unter der Aktion von  $G$  kovariant transformiert.

Ein weiterer Unterschied ist, dass sich im Connes-Lott- und im DEHYMH-Modell alle fermionischen Freiheitsgrade verdoppeln, was sich in beiden Fällen als eine Art Ladungskonjugation, zumindest aber als eine reelle Struktur interpretieren lässt (s. [Ca,Io,Sch], [Tol2]). Dieses Phänomen gibt es im Chamseddine-Connes Zugang nicht. Darüber hinaus handelt es sich im Connes-Lott- und im Chamseddine-Connes-Modell um Dirac-Operatoren vom einfachen Typ, (es sind Dirac-Yukawa-Operatoren), was beim DEHYMH-Modell nicht zutrifft.

Ein weiterer Punkt sollte nicht unerwähnt bleiben: Der totale Dirac-Operator  $\mathcal{D}_t$  des Connes-Lott-Modells besitzt im Rahmen der DEHYMH-Modelle eine Interpretation als ein zu einem Vakuum gehörender Dirac-Operator (s. hierzu [Tol2]).

- Ein weiterer wesentlicher Unterschied liegt in den auftretenden Darstellungen. Im DEHYMH- und im Chamseddine-Connes-Modell ist die grundlegende Darstellung die Fermiondarstellung des Standardmodells, eine Gruppendarstellung, während dagegen im Connes-Lott-Modell mit einer Algebendarstellung gestartet wird. Darüber hinaus unterscheiden sich die Darstellung des Connes-Lott-Modells und die durch die Fermiondarstellung induzierte Algebendarstellung erheblich.
- Die drei Modelle unterscheiden sich auch in der konkreten Form der bosonischen Wirkung. Beim Chamseddine-Connes-Modell erhält man alle Wechselwirkungsterme des Standardmodells, Einstein-Hilbert-Gravitation und weitere Wechselwirkungen, wie die Kopplung der skalaren Krümmung an das Feld  $\varphi$  und Wechselwirkungen, die quadratischer Ordnung in der Krümmung sind (s. Abschnitt 6.1). Das DEHYMH-Modell liefert dagegen die Standardmodellwechselwirkungen und die Einstein-Hilbert-Gravitation (s. Kap. 4), während das Connes-Lott-Modell nur die Standardmodellwechselwirkungen in der bosonischen Wirkung generiert.

### Parameterbeziehungen im Connes-Lott-Modell

Bei der Bestimmung der Parameterbeziehungen im Connes-Lott Modell sollte noch das folgende konzeptionelle Problem erwähnt werden. Es ist so, dass die dem Standardmodell zugrunde liegende Symmetriegruppe die  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  ist. Auf der anderen Seite ist die Symmetriegruppe eines Connes-Lott Modells durch die Gruppe der unitären Elemente der Algebra  $\mathcal{A}_f$  gegeben. Allerdings gibt es keine Algebra, die die Gruppe  $SU(3)$  als Gruppe der unitären Elemente enthält (s. [Ca,Io,Sch], [Io,Sch]), nur  $U(3)$  ist möglich. Dieses Problem lässt sich dadurch lösen, dass man die so genannte *Unimodularitätsbedingung* fordert,

$$\mathrm{tr}(P(\rho(a, b, c) + J\rho(a, b, c)J^{-1})) = 0, \quad P \text{ Projektor auf } \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R, \quad (6.84)$$

um die überflüssigen Gruppenelemente auszusondern.

Bestimmt man nun die nichtkommutative Yang-Mills-Wirkung und vergleicht die Parameter mit dem normierten Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{bos.,SM} &:= \int d^4x \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \varphi)^* (\mathcal{D}^\mu \varphi) - \frac{1}{2} \mu^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4 \\ &\quad - \frac{1}{2g_3^2} \text{tr}(C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}) - \frac{1}{2g_2^2} \text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4g_1^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.85)$$

des Standardmodells (s. [Ca, Io, Sch]), so ergeben sich in Top-Quark-Massen-Approximation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{8\pi^2} (Nx + \frac{2}{9} N\tilde{x} + \frac{11}{9} x' + \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} \tilde{y} + 3y'), \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{8\pi^2} (N(x + x') + y + y'), \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2} N(\tilde{x} + x'), \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi^2} (x + x') g_t^2, \\ \lambda &= \frac{k}{8\pi^2} g_t^4, \\ \mu^2 &= \frac{1}{8\pi^2} g_t^4 \end{aligned} \quad (6.87)$$

mit

$$y := \text{tr}(Y), \quad \tilde{y} := \text{tr}(\tilde{Y}), \quad y' := \text{tr}(Y') \quad (6.88)$$

und

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{2} (x + x') - 2Nx(\alpha^2 + \beta^2) - y(2\alpha^2 + \beta^2) - y'(2\alpha^2 + \beta^2) - 4N\tilde{x}\gamma^2 \\ &\quad - 3\tilde{y}\beta^2 - 2Nx'((\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2) - y'(2(\alpha + \beta)^2 + 4\beta^2). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  von  $k$  sind reell und werden durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (N(x + x') + y + y')\alpha + y'\beta + Nx'\gamma &= \frac{1}{2}(x + x') \\ 2y'\alpha + (2N(x + x') + y + 3\tilde{y} + 6y')\beta + 2x'\gamma &= x + x' \\ Nx'\alpha + Nx'\beta + 2N(\tilde{x} + x')\gamma &= x' \end{aligned} \quad (6.90)$$

festgelegt. Sie entstehen bei der Auswertung des Terms  $\alpha C$ . Die Rechnungen hierzu sind recht aufwendig, wenn auch elementar, deshalb wird hierfür auf [Ca, Io, Sch], [Ka, SchII] verwiesen.

## 6.2.2 Konsequenzen der Parameterbeziehungen

Bevor man sich einer weitergehenden Untersuchung der Parameterbeziehungen im Connes-Lott-Modell zuwendet, ist es sinnvoll zu überlegen, inwieweit die

Wahl der Parameter  $x, \tilde{x}, x', y, \tilde{y}, y'$  und der Kommutanten  $z, z'$  durch das Gleichungssystem (6.90) eingeschränkt wird. Sei

$$A := \begin{pmatrix} N(x+x') + y + y' & y' & Nx' \\ 2y' & 2N(x+x') + y + 3\tilde{y} + 6y' & 2Nx' \\ Nx' & Nx' & 2N(\tilde{x} + x') \end{pmatrix} \quad (6.91)$$

die Matrix, die das Gleichungssystem (6.90) in den Variablen  $\alpha, \beta, \gamma$  beschreibt.

Bestimmt man die Determinante von  $A$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \det A &= N^2(3(4Ny' + \tilde{y} + y) + 4N(\tilde{x} + x))x'^2 \\ &\quad + 2N(2N^2x^2 + N(8y' + 3\tilde{y} + 3y + 4N\tilde{x})x + 4y' \\ &\quad + (8N\tilde{x} + 7y + 3\tilde{x})y' \\ &\quad + y^2 + 3(N\tilde{x} + \tilde{y})y + 3\tilde{x}\tilde{y})x' \\ &\quad + 2N\tilde{x}(y^2 + (3Nx + 3\tilde{y} + 7y')y + 2N^2x^2 \\ &\quad + N(8y' + 3\tilde{y})x + 4y'^2 + 3(\tilde{y}y')). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Da in  $\det A$  alle Summanden positive Vorzeichen besitzen und  $x, x', \tilde{x}, y, y', \tilde{y}, N > 0$  gilt, ist  $\det A > 0$ . Dies heißt aber nichts anderes, dass das Gleichungssystem (6.90) für jede Wahl von positiven Parametern  $x, x', \tilde{x}, y, y', \tilde{y}$  sich in  $\alpha, \beta, \gamma$  lösen lässt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass das Gleichungssystem (6.90) keine Einschränkung an die der Parameter in  $z$  und  $z'$  darstellt.

Die nächste Frage, die sich nun stellt, ist, ob sich die Modell-Parameter so wählen lassen, dass sich die Relationen zwischen ihnen für die gemessenen Werte der physikalischen Kopplungen erfüllen lassen. Dies betrifft insbesondere die Kopplungen  $g_1, g_2, g_3, g_t$ . Die Parameterbeziehungen zwischen ihnen lassen sich als lineares Gleichungssystem in den Variablen  $x, x', \tilde{x}, y, y', \tilde{y}$  auffassen. Es hat die Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{8\pi^2} \left( Nx + \frac{2}{9}N\tilde{x} + \frac{11}{9}Nx' + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\tilde{y} + 3y' \right) \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{8\pi^2} (N(x+x') + y + y') \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2} N(\tilde{x} + x') \\ \frac{1}{g_t^2} &= \frac{1}{2\pi^2} (x + x'). \end{aligned} \quad (6.93)$$

Die erste Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$\frac{1}{g_1^2} = \frac{1}{16\pi^2} (N(x+x') + y + y') + \frac{N}{16\pi^2} (x+x') + \frac{N}{36\pi^2} (x' + \tilde{x}) + \frac{1}{16\pi^2} (3\tilde{y} + 5y').$$

Setzt man dies nun ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_2^2} + \frac{N}{8} \frac{1}{g_t^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{g_3^2} + \frac{1}{16\pi^2} (3\tilde{y} + 5y'), \\
\frac{1}{g_2^2} &= \frac{N}{4} \frac{1}{g_t^2} + \frac{1}{8\pi^2} (y + y'), \\
\frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2} (\tilde{x} + x'), \\
\frac{1}{g_t^2} &= \frac{1}{2\pi^2} (x + x').
\end{aligned} \tag{6.94}$$

Seien nun:

$$\begin{aligned}
u &:= \frac{1}{16\pi^2} (3\tilde{y} + 5y'); & v &:= \frac{N}{6\pi^2} (\tilde{x} + x'); \\
u' &:= \frac{1}{8\pi^2} (y + y'); & v' &:= \frac{1}{2\pi^2} (x + x').
\end{aligned} \tag{6.95}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass sich  $\tilde{y}, y', y, x', \tilde{x}$  immer so wählen lassen, dass sich  $u, u', v, v'$  auf jeden beliebigen positiven Wert bringen lassen. Damit erhält man also:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{g_3^2} + \frac{N}{8} \frac{1}{g_t^2} + u, \\
\frac{1}{g_2^2} &= \frac{N}{4} \frac{1}{g_t^2} + u', \\
\frac{1}{g_3^2} &= v, \\
\frac{1}{g_t^2} &= v'.
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Somit ist das obige Gleichungssystem lösbar genau dann, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1^2} &> \frac{1}{2} \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{g_3^2} + \frac{N}{8} \frac{1}{g_t^2}, \\
\frac{1}{g_2^2} &> \frac{N}{4} \frac{1}{g_t^2}.
\end{aligned} \tag{6.97}$$

Wenn man nun den physikalisch interessantesten Fall  $N = 3$  betrachtet und die gemessenen Werte für  $g_1, g_2, g_3, g_t$  bei einer Energie  $E = m_Z \approx 91.187 \text{ GeV}$  einsetzt (s. Tabelle 5.1, Gl. (5.144)), so ergibt sich für die beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
7.8243 \pm 0.0004 &> 2.034 \pm 0.002, \\
2.362 \pm 0.005 &> 1.4929 \pm 0.118.
\end{aligned} \tag{6.98}$$

Fasst man nun die Kopplungen  $g_i, g_t, i = 1, 2, 3$ , als energieabhängige Funktionen auf, so stellt sich die Frage, bis zu welcher Energie die Relationen (6.97) gültig sind. Die Untersuchungen in [Ca, Io, Sch] der zweiten Ungleichung von (6.97) ergeben als obere Schranke:

$$E_{max} = 2 \cdot 10^5 \text{ GeV}. \tag{6.99}$$

Wertet man an diesem Energie-Punkt die erste Ungleichung von (6.97) aus, so findet man:

$$7.15854 \pm 0.0044 > 2.895 \pm 0.1531. \quad (6.100)$$

Somit ist das lineare Gleichungssystem (6.93) für das Energie-Intervall  $[m_Z, 2 \cdot 10^5 GeV)$  immer lösbar, was gleichbedeutend damit ist, dass sich die Parameterbeziehungen an jedem Punkt innerhalb dieses Intervalls konsistent erfüllen lassen. Hier liegt ein entscheidender Unterschied zum Chamseddine-Connes- und zum DEHYMH-Modell, wo es genau einen kritischen Energie-Punkt  $E_{krit} \approx 10^{10} GeV$  gibt, an dem sich die Parameterbeziehungen konsistent erfüllen lassen (s. Kapitel 5.2, 6.1.4). Eine banale Konsequenz daraus ist, dass die Gültigkeitsbereiche des Connes-Lott-Modells und der beiden anderen Modelle um fünf Größenordnungen auseinander liegen.

Wenn man nun das Gleichungssystem (6.93) in den Variablen  $x, x', \tilde{x}, y, y', \tilde{y}$  löst, damit die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  aus dem Gleichungssystem (6.90) bestimmt und daraus die nichtlineare Higgs-Kopplung

$$\lambda = \frac{\pi^2}{2} \frac{k}{(x + x')^2}$$

berechnet, so tritt ein neues Phänomen auf, nämlich das der so genannten *Fuzziness* auf (s.u.a. [Ca,Io,Sch], [Io,Ka,Sch], [Io,Ka,SchII]). Dabei handelt es sich um eine Konsequenz der Tatsache, dass das Gleichungssystem (6.93) für die Variablen  $x, x', \tilde{x}, y, y', \tilde{y}$  unterbestimmt und damit im Allgemeinen nicht mehr eindeutig lösbar ist. Dies hat zur Folge, dass der Wert von  $\lambda$  nicht eindeutig bestimmt ist, sondern nur auf ein Intervall beschränkt wird (s. [Ca,Io,Sch], [Io,Ka,Sch], [Io,Ka,SchII]). Dies zieht nach sich, dass auch die sich daraus ergebende Higgs-Masse nur bis auf ein Intervall festgelegt ist. Die Analyse in [Ca,Io,Sch] ergibt hierfür bei der Energie  $E = m_Z$ :

$$m_H \in [284, 300) \text{ GeV}, \quad (6.101)$$

wobei hier die Masse des  $t$ -Quarks mit  $m_t = 175 \pm 6 \text{ GeV}$  zugrunde gelegt wird.

Die Intervallgrenzen sind allerdings mit  $7 \text{ GeV}$  recht eng gegenüber einem  $15 \text{ GeV}$  Fehler bei der Bestimmung der Higgs-Masse im DEHYMH-Modell.

Der Wert der Higgs-Masse liegt hier allerdings deutlich über den Werten im DEHYMH-Modell ( $188 \text{ GeV}$ ) und dem im Chamseddine-Connes Modell ( $190 \text{ GeV}$ ).

Betrachtet man nun den schwachen Winkel bzw.  $\sin^2 \theta_w = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2}$ , so erhält man mit Hilfe der Ungleichungen (6.97) die Abschätzung:

$$0 < \sin^2 \theta_w < \frac{2}{3} = 0.67. \quad (6.102)$$

Dies unterscheidet sich von der Abschätzung im Chamseddine-Connes- und DEHYMH-Modell, denn dort gilt:

$$0.25 = \frac{1}{4} < \sin^2 \theta_w < \frac{9}{20} = 0.45.$$

Auch sind im Connes-Lott-Modell die Verhältnisse der Kopplungskonstanten nicht beschränkt, wie es in den beiden anderen Modellen der Fall ist. Dies lässt sich vor allem auf die große Anzahl freier Modellparameter zurückführen.

### Spezialfälle

Zwei Spezialfälle verdienen beim Connes-Lott-Modell einer weiteren Diskussion. Zum einem ist der Fall mit  $z' = 0$  interessant, da dieser Fall in gewisser Weise der natürlichen Wahl eines Skalarproduktes bei einem fast kommutativen Modell entspricht (s. [Tol2]). Zum anderen ist der Fall  $z = 0$  von Interesse, da hier neue Zusammenhänge mit dem Chamseddine-Connes-Modell auftreten (s. [Ca, Io, Sch]).

**Der Fall:**  $z' = 0$  Sei  $A'$  nun die Systemmatrix für das Gleichungssystem (6.90), das man erhält, wenn man  $x' = y' = 0$  setzt. Für die Determinante ergibt sich:

$$\det A' = 2N\tilde{x}(y^2 + 3(Nx + \tilde{y})y + 2N^2x^2 + 3N\tilde{y}) > 0, \quad \text{für } x, \tilde{x}, y, \tilde{y} > 0. \quad (6.103)$$

Das System ist also für alle Wahlen von  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} > 0$  immer noch in eindeutig lösbar.

Betrachtet man nun die Parameterbeziehungen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{8\pi^2} \left( Nx + \frac{2}{9}N\tilde{x} + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\tilde{y} \right), \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{8\pi^2}(Nx + y), \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2}N\tilde{x}, \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_t^2} &= \frac{1}{2\pi^2}x, \\ \lambda &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\tilde{k}}{x^2}, \\ \mu^2 &= \frac{\pi^2}{4} \frac{\tilde{k}}{x^2}, \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\tilde{k} = \left( \frac{3}{2} - 2N(\alpha^2 + \beta^2) \right) x - (2\alpha^2 + \beta^2) y - 4N\gamma^2\tilde{x} - 3\beta^2\tilde{y}. \quad (6.106)$$

Betrachtet man nun die Gleichungen für  $g_i, g_t, i = 1, 2, 3$ , treten analoge Phänomene wie im allgemeinen Fall auf:

- Die Gleichungen für  $g_1, g_2, g_3, g_t$  sind in  $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}$  lösbar genau dann, wenn die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &> \frac{1}{2} \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{g_3^2} + \frac{N}{8} \frac{1}{g_t^2}, \\ \frac{1}{g_2^2} &> \frac{N}{4} \frac{1}{g_t^2} \end{aligned} \quad (6.107)$$

erfüllt sind.

- Man erhält, wenn man die Renormierungsgruppengleichungen mit in Betracht zieht, genau dasselbe Energie-Intervall (s. Gl. (6.101)), wie in der allgemeinen Betrachtung.

Es gibt allerdings auch einen wesentlichen Unterschied im Gegensatz zu der allgemeinen Betrachtung: Das System (6.93) ist für  $x' = y' = 0$  ist, wenn es lösbar ist, eindeutig lösbar. Dadurch liegt der Wert von  $\lambda$  und damit die Higgs-Masse eindeutig fest. Das Phänomen der *Fuzziness* tritt hier nicht auf. Bestimmt man die Higgs-Masse, so ergibt sich nach [Ca, Io, Sch] bei einer Energie  $E = m_Z$ :

$$m_H = 289 \text{ GeV}. \quad (6.108)$$

Die Higgs-Masse liegt wie zu erwarten im Intervall, das sich im allgemeinen Zugang ergibt, und liegt damit über den Massen, die vom Chamseddine-Connes- und vom DEHYMH-Modell vorhergesagt werden.

Für  $\sin^2 \theta_w$  des schwachen Winkels und die Verhältnisse der Eichkopplungen ergibt sich dasselbe wie im allgemeinen Fall.

**Der Fall  $z = 0$**  Sei  $A''$  nun die Systemmatrix, die man aus (6.90) für  $z = 0$  erhält, so gilt:

$$\det A'' = 12N^2 y' x'^2 + 2(8N + 4)y' x' > 0, \quad \text{für } x', y' > 0. \quad (6.109)$$

Somit ist das Gleichungssystem (6.90) für den Fall  $z = 0$  für alle  $x', y' > 0$  immer eindeutig lösbar.

Für die Parameterbeziehungen erhält man in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{11}{9} N x' + 3y' \right), \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{1}{8\pi^2} (N x' + y'), \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2} N x', \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_t^2} &= \frac{1}{2\pi^2} x', \\ \lambda &= \frac{\pi^2}{2} \frac{k'}{x'^2}, \\ \mu^2 &= \frac{\pi^2}{4} \frac{k'}{x'^2}, \end{aligned} \quad (6.111)$$

$$k' = \left( \frac{3}{2} + 2N((\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \gamma)^2) \right) x' - (2(\alpha + \beta)^2 + 4\beta^2) y'. \quad (6.112)$$

Betrachtet man nun wieder die Gleichungen für  $g_i, g_t$ ,  $i = 1, 2, 3$ , so erhält man durch sukzessives Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_1^2} &= \frac{3}{g_2^2} - \frac{4}{3} \frac{1}{g_3^2}, \\ \frac{1}{g_2^2} &= \frac{3}{4} \frac{1}{g_3^2} + y', \\ \frac{1}{g_3^2} &= \frac{1}{6\pi^2} N x'. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Um die erste Bedingung erfüllen zu können, muss man die Eichkopplungen wieder als energiabhängige Funktionen auffassen. Wenn man eine analoge Untersuchung mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen des Systems wie in Kapitel 5.2 vornimmt, erhält man genau denselben kritischen Punkt  $E_c$  auf der Energie-Skala wie im Connes-Lott- und im DEHYMH-Modell. Auch hier ergibt sich:

$$E_c \approx 10^{10} \text{ GeV}. \quad (6.114)$$

Diese Gleichheit lässt sich verstehen, wenn man berücksichtigt, dass die Parameterbeziehungen des Chamseddine-Connes-Modells (6.18) in die Parameterbeziehungen (6.113) übergehen, wenn man folgende Substitution vornimmt:

$$\begin{aligned} x' &:= \frac{2\pi f_2}{\ell_p'^2 \Lambda'^2 (4N + 3\text{tr}X)}, \\ y' &:= x' \text{tr}X \end{aligned}$$

(s. auch [Ca, Io, Ka, Sch]).

Allerdings ergibt sich aus den Beziehungen für  $g_3$  und  $g_t$ :

$$\frac{1}{g_3^2} = \frac{N}{3} \frac{1}{g_t^2} \Leftrightarrow g_t^2 = \frac{N}{3} g_3^2, \quad (6.115)$$

also für  $N = 3$ :

$$g_t^2 = g_3^2. \quad (6.116)$$

Andererseits liefern die Renormierungsgruppengleichungen bei der kritischen Energie  $E_c$  die Werte:

$$\begin{aligned} g_t^2(E_c) &= 0.17477 \pm 0.0040, \\ g_3^2(E_c) &= 0.43256 \pm 0.0005, \end{aligned} \quad (6.117)$$

woraus folgt, dass dieser Zugang, wie das Chamseddine-Connes-Modell, numerisch inkonsistent ist.

Der Umstand, dass sich die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen des Connes-Lott-Modells in die des Chamseddine-Connes-Modells und damit in die des DEHYMH-Modells überführen lassen, hat zur Folge, dass man für  $\sin^2 \theta_w$  und die Verhältnisse der Eichkopplungen genau dieselben Ergebnisse bekommt wie im Chamseddine-Connes- und im DEHYMH-Modell, da der globale Faktor bei der Quotientenbildung herausfällt.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung & Konsequenzen

Kommen wir nun zu einem Resumée der vorangegangenen Betrachtungen.

### 7.1 Überblick

Im ersten Kapitel werden zunächst die geometrischen Grundlagen und die notwendige Theorie von verallgemeinerten Dirac-Operatoren bereitgestellt und diskutiert. Dabei wird darauf geachtet, dass die Betrachtungen vom Vorzeichen der bei der Konstruktion verwendeten Clifford-Algebra unabhängig sind. Es werden die Fälle für die Clifford-Algebren vom Typ

$$v^2 = \pm 1, \quad v \in V, \quad (7.1)$$

simultan diskutiert.

Im folgenden Kapitel wird die Lichnerowicz-Zerlegung für das Quadrat eines verallgemeinerten Dirac-Operators untersucht. Die Untersuchung beschränkt sich hierbei auf den in der Literatur nicht behandelten Fall, in dem die zugrunde liegende Clifford-Algebra durch die Relation  $v^2 = 1$  erzeugt wird. Das Ergebnis wird mit den aus der Literatur bekannten Formeln verglichen (s. [Ack], [Ack,Tol], [Tol2]), wobei sich herausstellt, dass sich zum einen das Vorzeichen vor dem Bochner-Laplace-Operator ändert. Zum anderen findet man, dass die Potentialterme in beiden Fällen aus den gleichen Summanden bestehen, aber ein Vorzeichenunterschied vor dem Term der Form

$$\frac{1}{4} g_{ij} \gamma^k [\omega_k, \gamma^i] \gamma^\ell [\omega_\ell, \gamma^j] \quad (7.2)$$

auftritt. Darüber hinaus wurden Dirac-Operatoren vom einfachen Typ eingeführt, die sich durch ihre Lichnerowicz-Zerlegung auszeichnen.

Im dritten Kapitel werden die für die Konstruktion von Teilchenmodellen wichtigen Dirac-Yukawa- und Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren eingeführt. Dabei induziert jeder Dirac-Yukawa-Operator eine 3-Parameterschar von Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren. Es gibt dabei ausgezeichnete Parameterwahlen (s. auch [Tol2]), die durch geometrische bzw. physikalische Überlegungen motiviert

sind. Hierbei verdient, der physikalisch motivierte, *Wechselwirkungsfall* (s. Gl. (3.21)) besonderes Interesse, da er der einzige ausgezeichnete Fall ist, der bei Berücksichtigung von Quanten-Effekten konsistente Ergebnisse liefert. Es wird wie in den Arbeiten [Ack,Tol], [Tol], [Ack], [Tol2] ein verallgemeinertes Residuum  $\text{res}_\zeta$  auf der Menge der Dirac-Operatoren eingeführt, das ein modifiziertes Wodzicki-Residuum ist. Das Wodzicki-Residuum verlangt positive Operatoren, während die Quadrate von verallgemeinerten Dirac-Operatoren, die mit Hilfe der Clifford-Algebra  $v^2 = 1$  konstruiert sind, negative Quadrate besitzen. Dies macht eine Substitution des Dirac-Operators  $D$  durch  $iD$  im Argument von  $\text{res}_\zeta$  notwendig. Mit Hilfe des verallgemeinerten Residuums  $\text{res}_\zeta$  wird analog zu den Arbeiten [Tol],[Tol2] ein DEHYMH-Modell definiert, wobei der bosonische Anteil der Wirkung gegeben ist durch:

$$\text{res}_\zeta(D) = \mathcal{W}\text{res}(\zeta(iD)^{-2n+2}), \quad 2n = \dim \mathcal{M}. \quad (7.3)$$

Der bosonische Teil der Wirkung wird für einen allgemeinen Pauli-Dirac-Yukawa-Operator ausgewertet und mit den entsprechenden Ergebnissen für einen Pauli-Dirac-Yukawa-Operator zur Clifford-Algebra  $v^2 = -1$  (s. [Tol], [Tol2]) verglichen. Beim Vergleich findet man, dass im Ergebnis zwar alle Summanden gleich sind, sich aber die Vorzeichen ändern, bis auf den Term der proportional zum Riemannschen Krümmungsskalar  $R$  ist und den Term der Form  $\alpha'_3 \text{tr}_E(z'[\nabla_i^E, \phi][\nabla^{Ei}, \phi])$ . Damit hat der Teil ohne den Riemannsche Krümmungsskalar die Form:

$$\alpha'_2 \text{tr}_e(z' F_{ij}^E F^{Eij}) + \alpha'_3 \text{tr}_E(z'[\nabla_i^E, \phi][\nabla^{Ei}, \phi]) - \alpha'_4 \text{tr}_E(z'\phi^2) - \alpha'_0 \text{tr}_E(z'\phi^4). \quad (7.4)$$

Im Fall für die Clifford-Algebra  $v^2 = -1$  (s.[Tol]) hat der  $\alpha'_3$ -Term ein negatives Vorzeichen. Es zeigt sich, dass dieser Vorzeichenwechsel ein in [Tol2] angesprochenes Problem löst. Dabei geht es darum, wenn man eine reelle 3-Parameterschar von Pauli-Dirac-Yukawa-Operatoren für das Standardmodell aufstellt, dass sich herausstellt, dass der kinetische Term für das Higgs-Feld, beschrieben durch den  $\alpha'_3$ -Term, ein falsches relatives Vorzeichen zu den anderen Termen aus (7.4) besitzt. Dieses Problem tritt für den Fall der Clifford-Algebra vom Typ  $v^2 = 1$ , bedingt durch den relative Vorzeichenwechsel vor dem  $\alpha'_3$ -Term, nicht mehr auf.

Im Folgenden Kapitel werden die geometrischen Daten angegeben, die für die Konstruktion des Standardmodells der Elementarteilchenphysik als ein DEHYMH-Modell notwendig sind. Es werden hier zwei Versionen diskutiert: Einmal wird über das Standardmodell ohne rechtshändige Neutrinos referiert (s. [Tol], [Tol2]). Des Weiteren werden die Daten des Standardmodells mit rechtshändigen Neutrinos angegeben. Dabei ist der letztgenannte Fall physikalisch interessant, da er die Konstruktion von massiven Neutrinos zulässt. Derartige Theorien bieten aber gerade einen Ansatz für das Verständnis so genannter *Neutrino-Oszillationen* (s. [Bil,Gi,Gr]). Ein weiterer wichtiger Punkt in beiden Versionen ist, dass durch die Yukawa-Abbildung (s. Def. (3.3)) die Hyperladungsbeziehungen (Gl.(4.10)) (s. [Tol2]) und (4.11) festgelegt werden. Ferner lässt sich mit Hilfe einfacher Überlegungen die Hyperladung für die rechtshändigen Neutrinos bestimmen, was auch getan wurde. Im Gegensatz hierzu müssen im konventionellen Zugang zum Standardmodell (s. [Na]) diese Beziehungen explizit gefordert werden, um die richtigen elektrischen Ladungen für die Elementarteilchen zu erhalten. Darüber hinaus werden die Parameterbeziehungen für das Standardmodell mit rechtshändigen Neutrinos bestimmt.

Das fünfte Kapitel diskutiert die physikalischen Konsequenzen der Parameterbeziehungen für das Standardmodell mit und ohne rechtshändigen Neutrinos. Es stellt sich heraus, die Verhältnisse der Kopplungen  $\frac{g_2^2}{g_1^2}$  und  $\sin^2 \theta_W := \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2}$  in beiden Modellen dieselben sind. Ferner sind alle diese Verhältnisse beschränkt. Es wird der Einfluß von Quanten-Korrekturen untersucht. Dies geschieht mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen, die die Energieabhängigkeit der physikalischen Kopplungen beschreiben. Es stellt sich heraus, dass die Parameterbeziehungen für beide Modelle sich mit den empirischen Werten für die physikalischen Kopplungen nur an genau einem Punkt der Energieskala konsistent erfüllen lassen. Dieser Punkt ist in beiden Modellen derselbe. Die kritische Energie liegt bei

$$E_c = (0.96 \pm 0.29)10^{10} \text{ GeV}. \quad (7.5)$$

Mit Hilfe der Parameterbeziehungen lässt sich über die Renormierungsgruppengleichungen die Masse des Higgs-Bosons bestimmen. Hierbei zeigt sich, dass die zur Massenbestimmung benutzten Beziehungen, aufgrund der gemachten Näherungen in beiden Versionen wieder dieselben sind. Es zeigt sich weiter, dass für die ausgezeichneten Parameterwahlen des Pauli-Dirac-Yukawa-Operators (3.19), (3.20), (3.21) nur der Wechselwirkungsfall (3.21) mit den Renormierungsgruppengleichungen konsistente Ergebnisse liefert. Man erhält für diesen Fall für die Higgs-Masse einen eindeutigen Wert:

$$m_h = 188 \pm 15 \text{ GeV}. \quad (7.6)$$

Lässt man dagegen die Modellparameter  $a_0, a_2, a_3$  offen, so erhält man keinen eindeutigen Wert mehr, aber es lassen sich noch Schranken für die Higgs-Masse angeben:

$$129.57 \text{ GeV} \leq m_h < 473.33 \text{ GeV}. \quad (7.7)$$

Im letzten Kapitel werden die Konsequenzen des vorangegangenen Kapitels mit den Ergebnissen entsprechender Untersuchungen für das Chamseddine-Connes-Modell (s. [Ca, Io, Ka, Sch], [Ca, Io, Sch]) und das Connes-Lott-Modell (s. [Ca, Io, Sch]) verglichen. Dabei zeigt sich für das Chamseddine-Connes-Modell, dass die angegebenen Parameterbeziehungen in [Ca, Io, Ka, Sch] (bzw. Gl. ((6.13), (6.14)) nicht von dem in [Ca, Io, Ka, Sch] angegebenen Funktional

$$\text{Tr} \left( \zeta \frac{D^2}{\Lambda} \right) \quad (7.8)$$

erzeugt werden. Es wird ein Funktional angegeben, das die Parameterbeziehungen aus [Ca, Io, Ka, Sch] reproduziert. Beim Vergleich dieser Parameterbeziehungen mit denen des Dirac-Modells stellt sich heraus, dass die Parameterbeziehungen für die Eichkopplungen (Gl. (6.13)) bis auf einen globalen Vorfaktor gleich sind. Dies führt dazu, dass die Verhältnisse  $\frac{g_i^2}{g_j^2}$  und  $\sin^2 \theta_W$  mit denen des DEHYMH-Modells übereinstimmen. Auch zeigt sich hier das gleiche Phänomen, dass wie beim DEHYMH-Modell ein anderes Vorzeichen zwischen den Einstein-Hilbert-Term und den übrigen Termen der Wirkung auftritt als in der Definition eines Einstein-Hilbert-Yang-Mills-Higgs-Modells (s. (4.13)). Weiter zeigt sich, dass die Parameterbeziehungen des Chamseddine-Connes-Modells (Gl. (6.13), (6.14)) bei der Berücksichtigung von Quanten-Effekten zu numerischen Inkonsistenzen führen (s. Gl. (6.30)). Untersucht man die Parameterbeziehungen, die

von dem Funktional (7.8) erzeugt werden, so stellt sich heraus, dass diese Beziehungen für die Eichkopplungen liefern (s. Gl. (6.45)), die zu den gemessenen Werten für diese Kopplungen in Widerspruch stehen. Macht man nun die entsprechenden Untersuchungen für die Parameterbeziehungen des Connes-Lott-Modells, so stellt man fest, dass sich hier die Parameterbeziehungen von denen des DEHYMH-Modells erheblich unterscheiden. Dies ist in soweit nicht erstaunlich, da es hier größere konzeptionelle Unterschiede zwischen beiden Modellen gibt (s.a. [Tol2]). Somit unterscheiden sich die Schranken für  $\sin^2 \theta_W$  und auch die Vorhersagen für die Higgs-Masse. Hier tritt das Phänomen der *Fuzzyness* auf, was sich darin ausdrückt, dass sich modellbedingt nur ein Intervall bestimmen lässt, in dem die Higgs-Masse liegt. Dies ist im allgemeinsten behandelten Fall

$$[284, 300) \text{ GeV}, \quad (7.9)$$

das für den Spezialfall 6.2.2 auf einen einzigen Wert

$$289 \text{ GeV} \quad (7.10)$$

zusammenbricht.

## 7.2 Probleme & Abschließende Diskussion

Betrachtet man nun die vorhergehend beschriebenen Ergebnisse kritisch, so sollte angemerkt werden:

- In einem physikalischen Modell sollte die Raumzeit durch eine 4-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit beschrieben (s. z.B. [Na]) werden und nicht wie in den Dirac-Modellen durch eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Grund für die Verwendung Riemannscher Mannigfaltigkeiten liegt darin, dass das zur Definition der bosonischen Wirkung verwendete Wodzicki-Residuum einen elliptischen Operator verlangt. Dies wird dadurch sichergestellt, dass der Dirac-Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit operiert. Eine Idee zur Lösung dieses Problems wurde in [Tol2] vorgeschlagen, indem man für den bosonischen Teil der Wirkung das Funktional

$$\text{tr}_\mathcal{E}(\zeta\mathcal{V}) \quad (7.11)$$

verwendet.  $\mathcal{V}$  ist hier der Potentialterm der Lichnerowicz-Zerlegung des zugrundeliegenden Dirac-Operators. Die Konsequenzen dieses Ansatzes sind bislang noch nicht untersucht.

- Bei der Untersuchung von Quanten-Einflüssen in Abschnitt 5.4 wird die Renormierungsgruppengleichung in der 1-Loop-Approximation benutzt. Andererseits werden die Gleichungen über einen weiten Energiebereich integriert, so dass die Güte dieser Approximation unklar ist.
- Zur physikalischen Relevanz der aus den DEHYMH-Modell bestimmten Higgs-Masse lässt sich sagen: Aufgrund von Messergebnissen und quantenfeldtheoretischen Überlegungen lassen sich im Standardmodell die möglichen Werte für die Higgs-Masse einschränken auf das Intervall (s. [Ro])

$$[114, 193] \text{ GeV}. \quad (7.12)$$

Der Wert aus Kapitel 5.4 von  $188 \text{ GeV}$  ist in diesem Intervall enthalten. Andererseits liegt das Massen-Intervall (7.9) des Connes-Lott-Modells komplett außerhalb des möglichen Bereichs für die Higgs-Masse.

- Bei der Konstruktion eine Pauli-Dirac-Yukawa-Operators

$$D_{PY} = D + \Phi + \mathcal{I} \left( a_2 \gamma(F^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}) + a_3 \gamma(\nabla^{\text{End}(\mathcal{E})} \Phi) + a_0 \gamma(\Phi^2) \right) \quad (7.13)$$

sind bestimmte Wahlen der Parameter  $a_0, a_2, a_3$  geometrisch ausgezeichnet (s. (3.19), (3.20)). Allerdings stellt sich heraus, dass diese ausgezeichneten Parameterwahlen nicht mit den Quanten-Korrekturen verträglich sind (s. (5.155), ..., (5.157)). Der Grund hierfür liegt darin, dass sich am kritischen Skalenpunkt  $t_c$  die Beziehung

$$a_2^2 = 2 \left( \frac{g_t(t_c)^2}{g_3(t_c)^2} \right) a_3^2 \quad (7.14)$$

für die Parameter  $a_2$  und  $a_3$  ergibt (s. (5.131)), die sich für die geometrisch ausgezeichneten Fälle nicht erfüllen lässt. Wenn man aber zu dem modifizierten Pauli-Dirac-Yukawa-Operator

$$D'_{PY} = D + \Phi + \mathcal{I} \left( a_2 \gamma(F^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}) + a_3 \gamma(\nabla^{\text{End}(\mathcal{E})} \Phi') + a_0 \gamma(\Phi'^2) \right) \quad (7.15)$$

(s. (4.17)) übergeht, bei dem in den Endomorphismen  $\Phi'$  die Yukawa-Kopplungsmatrizen  $g$  durch beliebige komplexe Matrizen  $\Lambda$  ersetzt sind, tauchen zusätzliche Parameter in der Beziehung (7.14) auf, so dass sich die geometrischen Parameterwahlen nicht mehr zu Konsistenzproblemen führen. Die Konsequenzen dieses Ansatzes, sowie die geometrische Interpretation des Pauli-Dirac-Yukawa-Operators  $D'_{PY}$  sind noch nicht untersucht.

# Anhang A

## Spur-Formel

In diesem Abschnitt wird ein nützliches Lemma zur Spur-Berechnung aus [Ack] zitiert.

**Lemma A.1.** *Sei ein  $\mathbb{Z}_2$ -graduiertes Clifford-Modulbündel mit ungerader Clifford-Aktion. Seien ferner  $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M}, \text{End}_{c_{\pm}(\mathcal{M})}(\mathcal{E}))$ , und  $\sigma \in \Omega^q(\mathcal{M}, \text{End}_{c_{\pm}(\mathcal{M})}(\mathcal{E}))$  so gilt:*

$$\text{tr}_{\mathcal{E}}(c_{\pm}(\omega)c_{\pm}(\sigma)) = 0, \quad \text{für } p - q \neq 0. \quad (\text{A.1})$$

**Beweis:** Die Idee hierfür stammt aus [Ack]. Sei  $e^1, \dots, e^n$  eine lokale Orthonormalbasis. Dann gilt lokal:

$$c_{\pm}(\omega) = c_{\pm}(e^I) \otimes \omega_I, \quad c_{\pm}(\sigma) = c_{\pm}(e^J) \otimes \sigma_J.$$

$I$  und  $J$  sind hierbei Multiindizes mit  $|I| = p$ ,  $|J| = q$ .

Sei nun  $p + q$  ungerade. Dann gilt:

$$\text{tr}_{\mathcal{E}}(c_{\pm}(\omega)c_{\pm}(\sigma)) = \text{tr}(c_{\pm}(e^I)c_{\pm}(e^J)) \cdot \text{tr}(\omega_I \sigma_J).$$

Der erste Faktor verschwindet, da  $p + q$  ungerade ist.

Sei nun  $p + q$  gerade. Man betrachte nun  $\text{tr}(c_{\pm}(e^I)c_{\pm}(e^J))$ . Die Multiindizes seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit aufsteigend geordnet. Sei nun:

$$\begin{aligned} I &= \{i_1, \dots, i_p\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_q\}, \quad K := I \cap J, \quad |K| =: k \\ \Rightarrow \quad \exists I', J' \quad I &= K \cup I', \quad J = K \cup J', \quad I' \cap J' = \emptyset. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\text{tr}(c_{\pm}(e^I)c_{\pm}(e^J)) = (-1)^{k(q-k)} \text{tr}(c_{\pm}(e^K)c_{\pm}(e^K)c_{\pm}(e^{I'})c_{\pm}(e^{J'})) \quad (\text{A.2})$$

$$= (-1)^{k(q-k) + \frac{k(k-1)}{2}} \text{tr}(c_{\pm}(e^{I'})c_{\pm}(e^{J'})). \quad (\text{A.3})$$

Da nach Voraussetzung  $p + q \neq 0$  und gerade ist, ist  $|I'| + |J'| \neq 0$  und gerade. Dann folgt aus den zyklischen Eigenschaften der Spur, dass

$$\text{tr}_{\mathcal{E}}(c_{\pm}(e^{I'})c_{\pm}(e^{J'})) = 0$$

ist.  $\square$

## Anhang B

# Formel zu Zusammenhängen bei Spin-Mannigfaltigkeiten

In diesem Anhang finden sich einige nützliche Formeln zu Spin-Zusammenhängen.

Um mit der Notation in der übrigen Arbeit konsistent zu bleiben, wiederholen wir die Definition eines Spin-Zusammenhanges:

**Definition B.1.** *Seien  $(\mathcal{M}, g)$  eine (pseudo-) Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{S}$  ein zugehöriges Spinor-Bündel über  $\mathcal{M}$  und  $\gamma_{\pm} : \mathcal{C}_{\pm}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{S})$  die Clifford-Aktion. Dann ist der Spin-Zusammenhang definiert durch:*

$$\nabla_{\mu}^{\mathcal{S}} := \partial_{\mu} + \frac{1}{4}\omega_{\mu\alpha\beta}\gamma_{+}^{\alpha}\gamma_{+}^{\beta}, \quad \text{für } \gamma_{+}^{\alpha}\gamma_{+}^{\beta} + \gamma_{+}^{\beta}\gamma_{+}^{\alpha} = 2\eta^{\alpha\beta}\mathbf{1}, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_{\mu}^{\mathcal{S}} := \partial_{\mu} - \frac{1}{4}\omega_{\mu\alpha\beta}\gamma_{-}^{\alpha}\gamma_{-}^{\beta}, \quad \text{für } \gamma_{-}^{\alpha}\gamma_{-}^{\beta} + \gamma_{-}^{\beta}\gamma_{-}^{\alpha} = -2\eta^{\alpha\beta}\mathbf{1}. \quad (\text{B.2})$$

$\omega_{\mu\alpha\beta}$  bezeichne hier die Zusammenhangskoeffizienten bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis des Levi-Civita Zusammenhanges auf  $\mathcal{M}$ .

Als Nächstes geben wir eine lokale Form für die Krümmung in lokalen Orthonormalbasen an:

**Lemma B.1.** *Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine (pseudo-) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und der Levi-Civita Zusammenhang habe die lokale Form:  $\nabla = e^i \otimes (\partial_i + \omega_i)$  bezüglich eines lokalen Orthonormalbasisfeldes.  $\partial_i$  sei die Richtungsableitung in Richtung die Basisvektors  $e_i$ . Die Krümmung ist dann gegeben durch:  $\tilde{R} = \nabla \circ \nabla$ , und es gilt lokal:*

$$\tilde{R}_b^a = \frac{1}{2}R_{bij}^a e^i \wedge e^j \quad (\text{B.3})$$

$$R_{bij}^a = \partial_i \omega_j^a{}_b - \partial_j \omega_i^a{}_b + \omega_i^a{}_c \omega_j^c{}_b - \omega_j^a{}_c \omega_i^c{}_b, \quad (\text{B.4})$$

wobei die Indizes  $a, b$  die Endomorphismenkomponenten von  $\omega_i$  beziehungsweise von  $\tilde{R}_{ij}$  bezeichnen.

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= e^i \wedge e^j ((\partial_i \omega_j) + \omega_i \omega_j) \\ &= \frac{1}{2} e^i \wedge e^j ((\partial_i \omega_j + \omega_i \omega_j) - (i \leftrightarrow j)).\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet  $i \leftrightarrow j$ , dass an diese Stelle der Ausdruck der vorhergehenden Klammer mit vertauschten Indizes  $i$  und  $j$  zu setzen ist. In Komponenten ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_b^a &= \frac{1}{2} e^i \wedge e^j (((\partial_i \omega_j)_b^a + (\omega_i \omega_j)_b^a) - (i \leftrightarrow j)) \\ &= \frac{1}{2} e^i \wedge e^j ((\partial_i \omega_j^a)_b + \omega_{i\ c}^a \omega_j^c{}_b - (\partial_j \omega_i^a)_b - \omega_j^a{}_c \omega_i^c{}_b) \\ &= \frac{1}{2} R_{bij}^a e^i \wedge e^j,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

$R_{bij}^a$  sind die Komponenten des so genannten Riemannschen Krümmungstensors. Als nächstes kommen wir zu Krümmungen von Spin-Zusammenhängen:

**Lemma B.2.** *Sei  $(\mathcal{M}, g)$  eine (pseudo-) Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und  $\nabla^{S^\pm}$  der zugehörige Spin-Zusammenhang auf dem zugehörigen Spinor-Bündel  $\mathcal{S}$  mit der Clifford-Aktion  $\gamma_\pm$  (s. B.1). Dann gilt:*

$$[\nabla_i^{S^+}, \nabla_j^{S^+}] = \frac{1}{4} R_{ijkl} \gamma_+^{kl}, \quad \gamma_+^i \gamma_+^j + \gamma_+^j \gamma_+^i = 2\eta^{ij} \mathbf{1}, \quad (\text{B.5})$$

$$[\nabla_i^{S^-}, \nabla_j^{S^-}] = -\frac{1}{4} R_{ijkl} \gamma_-^{kl}, \quad \gamma_-^i \gamma_-^j + \gamma_-^j \gamma_-^i = -2\eta^{ij} \mathbf{1}. \quad (\text{B.6})$$

$R_{ijkl}$  sind die Komponenten des Riemann-Tensors mit gesenkten Indizes und  $\eta^{ij}$  die Komponenten der Metrik in einer Orthonormalbasis.

**Beweis:** Durch explizite Rechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}[\nabla_i^{S^\pm}, \nabla_j^{S^\pm}] &= [\partial_i \pm \frac{1}{4} \omega_{ikl} \gamma_\pm^{kl}, \partial_j \pm \frac{1}{4} \omega_{jmn} \gamma_\pm^{mn}] \\ &= \pm [\partial_i, \frac{1}{4} \omega_{jmn} \gamma_\pm^{mn}] \pm [\frac{1}{4} \omega_{ikl} \gamma_\pm^{kl}, \partial_j] + [\frac{1}{4} \omega_{ikl} \gamma_\pm^{kl}, \frac{1}{4} \omega_{jmn} \gamma_\pm^{mn}] \\ &= \pm \frac{1}{4} ((\partial_i \omega_{jkl}) - (\partial_j \omega_{ikl})) \gamma_\pm^{kl} + \frac{1}{16} \omega_{ikl} \omega_{jmn} [\gamma_\pm^{kl}, \gamma_\pm^{mn}].\end{aligned}$$

Wertet man nun den Kommutator im letzten Summanden weiter aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}[\gamma_\pm^{kl}, \gamma_\pm^{mn}] &= [\gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell, \gamma_\pm^m \gamma_\pm^n] \\ &= \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^m \gamma_\pm^n - \gamma_\pm^m \gamma_\pm^n \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \\ &= \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^m \gamma_\pm^n - \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^m \gamma_\pm^n \\ &\quad \pm 2\eta^{\ell m} \gamma_\pm^k \gamma_\pm^n \mp 2\eta^{km} \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^n \pm 2\eta^{\ell n} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^k \mp 2\eta^{kn} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^\ell \\ &= \pm 2(\eta^{\ell m} \gamma_\pm^k \gamma_\pm^n - \eta^{km} \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^n + \eta^{\ell n} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^k - \eta^{kn} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^\ell).\end{aligned}$$



Setzt man dies nun in den dritten Term von  $[\nabla_i^{S^\pm}, \nabla_j^{S^\pm}]$  ein so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16} \omega_{ik\ell} \omega_{jmn} [\gamma_\pm^{k\ell}, \gamma_\pm^{mn}] \\
&= \pm \frac{1}{8} \omega_{ik\ell} \omega_{jmn} (\eta^{\ell m} \gamma_\pm^k \gamma_\pm^n - \eta^{km} \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^n + \eta^{\ell n} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^k - \eta^{kn} \gamma_\pm^m \gamma_\pm^\ell) \\
&= \pm \frac{1}{8} (\omega_{ik}{}^s \omega_{j s \ell} \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell - \omega_{i s \ell} \omega_{j k s} \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^k + \omega_{i \ell}{}^s \omega_{j k s} \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell - \omega_{i s \ell} \omega_{j k}{}^s \gamma_\pm^\ell \gamma_\pm^k) \\
&= \pm \frac{1}{8} (\omega_{ik}{}^s \omega_{j s \ell} [\gamma_\pm^k, \gamma_\pm^\ell] - \omega_{j \ell}{}^s \omega_{i s k} [\gamma_\pm^\ell, \gamma_\pm^k]) \\
&= \pm \frac{1}{4} (\omega_{ik}{}^s \omega_{j s \ell} - \omega_{j k}{}^s \omega_{i s \ell}) \gamma_\pm^{k\ell}.
\end{aligned}$$

Setzt man dies nun wieder in den Ausdruck für  $[\nabla_i^{S^\pm}, \nabla_j^{S^\pm}]$  ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
[\nabla_i^{S^\pm}, \nabla_j^{S^\pm}] &= \pm \frac{1}{4} ((\partial_i \omega_{j k \ell}) - (\partial_j \omega_{i k \ell}) + \omega_{i k}{}^s \omega_{j s \ell} - \omega_{j k}{}^s \omega_{i s \ell}) \gamma_\pm^{k\ell} \\
&= \pm \frac{1}{4} R_{ijkl} \gamma_\pm^{k\ell}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung.  $\square$

Des Weiteren sind noch folgende Formeln nützlich:

**Lemma B.3.**

$$R_{ijkl} \gamma_+^{ij} \gamma_+^{k\ell} = -2R\mathbf{1}, \quad \gamma_+^i \gamma_+^j + \gamma_+^j \gamma_+^i = 2g^{ij} \mathbf{1} \quad (\text{B.7})$$

$$R_{ijkl} \gamma_-^{ij} \gamma_-^{k\ell} = -2R\mathbf{1}, \quad \gamma_-^i \gamma_-^j + \gamma_-^j \gamma_-^i = -2g^{ij} \mathbf{1}. \quad (\text{B.8})$$

$R_{ijkl}$  bezeichnen hier die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors und  $R$  den Riemannschen Krümmungsskalar, der in diesem Zusammenhang wie folgt definiert ist:  $R := R^{ij}{}_{ij}$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt wieder durch explizite Rechnung:

$$R_{ijkl} \gamma_\pm^{ij} \gamma_\pm^{k\ell} = R_{ijkl} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell,$$

da  $R_{ijkl} = -R_{jikl}$  beziehungsweise  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$  und  $R_{ijkl} = R_{klij}$  ist. Verwendet man nun die für den Riemannschen Krümmungstensor gültige Bianchi-Identität

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell &= -(R_{iklj} + R_{iljk}) \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \\
&= -(R_{iklj} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell + R_{iljk} (\gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \\
&\quad \mp 2g^{j\ell} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^k \pm 2g^{jk} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^\ell)) \\
&= -(2R_{iklj} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j \gamma_\pm^k \gamma_\pm^\ell \pm 2R_{ij} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j), \quad R_{ij} := R_{ilj}{}^\ell \\
&= -(2R_{iklj} (\gamma_\pm^i \gamma_\pm^k \gamma_\pm^j \gamma_\pm^\ell \mp 2g^{j\ell} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^k \pm 2g^{jk} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^\ell) \\
&\quad \pm 2R_{ij} \gamma_\pm^i \gamma_\pm^j).
\end{aligned}$$

Löst man nun nach  $R_{ijkl}\gamma_{\pm}^i\gamma_{\pm}^j\gamma_{\pm}^k\gamma_{\pm}^l$  auf und nutzt aus, dass  $R_{ij}$  in den Indizes symmetrisch ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3R_{ijkl}\gamma_{\pm}^i\gamma_{\pm}^j\gamma_{\pm}^k\gamma_{\pm}^l &= \mp 6R_{ij}\gamma_{\pm}^i\gamma_{\pm}^j = -6R\mathbf{1} \\ \Rightarrow R_{ijkl}\gamma_{\pm}^i\gamma_{\pm}^j\gamma_{\pm}^k\gamma_{\pm}^l &= -2R\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Als Letztes geben wir noch die Formel für den Kommutator eines Produktzusammenhanges eines getwisteten Spinor-Bündels an.

**Lemma B.4.** *Sei  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}$  ein getwistetes Spinor-Bündel über einer (pseudo-) Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ferner sei  $\nabla^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}}$  der Produktzusammenhang auf  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}$ , dann gilt:*

$$[\nabla_i^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}}, \nabla_j^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}}] = \pm \frac{1}{4} R_{ijkl} \gamma_{\pm}^{kl} + F_{ij}^{\mathcal{E}}, \quad \gamma_{\pm}^i \gamma_{\pm}^j + \gamma_{\pm}^j \gamma_{\pm}^i = \pm 2g^{ij} \mathbf{1}.$$

$F_{ij}^{\mathcal{E}} := (\partial_i A_j) - (\partial_j A_i) + [A_i, A_j]$  ist die Krümmung des Bündels  $\mathcal{E}$ .

**Beweis:** Der Produktzusammenhang auf  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}$  hat lokal die folgende Form:

$$\nabla_i^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}} = \partial_i + \left( \pm \frac{1}{4} \right) \omega_{ijk} \gamma_{\pm}^{jk} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{E}} + \mathbf{1}_{\mathcal{S}} \otimes A_i.$$

So ergibt sich:

$$\begin{aligned} [\nabla_i^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}}, \nabla_j^{\mathcal{S} \otimes \mathcal{E}}] &= [\nabla_i^{\mathcal{S}}, \nabla_j^{\mathcal{S}}] \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{E}} + \mathbf{1}_{\mathcal{S}} \otimes ([\partial_i, A_j] + [A_i, \partial_j] + [A_i, A_j]) \\ &= \pm \frac{1}{4} R_{ijkl} \gamma_{\pm}^{kl} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{S}} + \mathbf{1}_{\mathcal{S}} \otimes F_{ij}^{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde Lemma B.2 verwendet, womit sich die Behauptung ergibt.  $\square$

## Anhang C

# Elemente der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die folgenden Sätze sind in leicht abgewandelten Form [Am] entnommen.

**Theorem C.1 (Vergleichssatz I).** *Es seien  $J$  und  $D$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  und  $g \in C(J \times D, \mathbb{R})$ ,  $g$  genüge einer Lipschitzbedingung bezüglich  $D$ . Ferner sei  $u \in C^1(J, D)$  Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = g(t, x).$$

*Seien nun  $v \in C^1(J, D)$  und  $\alpha \in J$ , und des Weiteren gelte:*

$$v(\alpha) \leq u(\alpha) \quad \text{und} \quad \dot{v} \leq g(t, v(t)) \quad \forall t \in J \cap [\alpha, \infty).$$

*So gilt:*

$$v \leq u \quad \text{auf} \quad J \cap [\alpha, \infty).$$

**Beweis:** Es seien  $\alpha, \beta \in J$ ,  $\beta > \alpha$  und  $u_\lambda$  Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = g(t, x) + \lambda, \quad x(\alpha) = u(\alpha)$$

mit  $0 < \lambda < \lambda_0$ , wobei  $\lambda_0$  so gewählt ist, dass  $u_\lambda$  auf  $[\alpha, \beta]$  existiert.

Annahme:  $\exists t_0 \in (0, \lambda_0)$  und  $\exists t_1 \in (\alpha, \beta)$  mit  $v(t_1) > u_\lambda(t_1)$ , so muss gelten:

$$\exists t_0 \in [\alpha, t_1) \quad v(t_0) = u_\lambda(t_0) \quad \text{und} \quad v(t) > u_\lambda(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \partial_t v(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0+} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0+} \frac{u_\lambda(t) - u_\lambda(t_0)}{t - t_0} \geq \dot{u}_\lambda(t_0) \\ &= g(t_0, u_\lambda(t_0)) + \lambda > g(t_0, v(t_0)) \geq \dot{v}(t_0). \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu den gemachten Voraussetzungen, also folgt:

$$v \leq u_\lambda \quad \text{auf} \quad [\alpha, \beta] \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0).$$

Da  $u_\lambda$  stetig von  $\lambda$  abhängt (dies lässt z.B. mit Satz 13.1. in [Heu] verifizieren), folgt für  $\lambda \rightarrow 0+$   $v \leq u$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Da  $\beta$  beliebig war, folgt die Behauptung.

□

In analoger Weise lässt sich ein zweiter Vergleichssatz formulieren:

**Theorem C.2 (Vergleichssatz II).** *Es seien  $J$  und  $D$  offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  und  $g \in C(J \times D, \mathbb{R})$  und  $g$  genüge einer Lipschitzbedingung auf  $D$ . Ferner sei  $u \in C^1(J, D)$  und Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = g(t, x),$$

*und es sei  $v \in C^1(J, D)$  mit  $\alpha \in J$ . Des Weiteren gelte:*

$$v(\alpha) \geq u(\alpha) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) \geq g(t, v(t)) \quad \forall t \in J \cap [\alpha, \infty).$$

*So gilt:*

$$v \geq u \quad \text{auf} \quad J \cap [\alpha, \infty).$$

Der Beweis lässt sich in analoger Weise wie bei C.1 führen.

# Literaturverzeichnis

- [Ack] Thomas Ackermann: **Die supersymmetrische Struktur allgemeiner Dirac Operatoren und ihre Konsequenzen in spektralen Modellen**, Habilitation zur Erlangung der Venia Legendi der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim.
- [Ack,Tol] Thomas Ackermann, Jürgen Tolksdorf: **The generalized Lichnerowicz formula and analysis of Dirac operators**, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Berlin, New York 1996.
- [Am] Herbert Amann: **Gewöhnliche Differentialgleichungen**, Lehrbuch, de Gruyter, 1983.
- [BGV] Nicole Berline, Ezra Getzler, Michèle Vergne: **Heat Kernels and Dirac Operator**, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
- [Bil,Gi,Gr] S.M. Bilenky, C. Giunti, W. Grimus: **Phenomenology of Neutrino Oscillations**, *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 43: 1-86, 1999; hep-ph/9812360.
- [Ca1] C. Caso et al. (Particle Data Group): **Leptons**, *European Physical Journal*, C3: 1, (1998).
- [Ca2] C. Caso et al. (Particle Data Group): **Quarks**, *European Physical Journal*, C3: 1, (1998).
- [Ca3] C. Caso et al. (Particle Data Group): **W**, *European Physical Journal*, C3: (1998) and 1999 partial update for edition 2000.
- [Ca,Io,Ka,Sch] Lionel Carminati, Bruno Iochum, Daniel Kastler, Thomas Schücker: **On Connes' new principle of general relativity Can spinors hear the forces of spacetime?**, *J. Math. Phys.*, 28: 1269 (1997); hep-th/9612228.
- [Ca,Io,Sch] Lionel Carminati, Bruno Iochum, Thomas Schücker: **Noncommutative Yang-Mills and Noncommutative Relativity: A Bridge over Troubled Water**, *Eur.Phys.J.*, C8: 697-709, (1999); hep-th/9706105.
- [Ca,Io,SchII] Lionel Carminati, Bruno Iochum, Thomas Schücker: **The Noncommutative Constraints on the Standard Model à la Connes**, *J.Math.Phys.*, 38: 1269-1280, (1997) hep-th/9604169.
- [Ch,Co] Ali H. Chamssedine, Alain Connes: **The Spectral Action Principle**, *Commun.Math.Phys.*, 186: 731-750, (1997); hep-th/960601.

- [Co,Lo] Alain Connes, John Lott: **Particle Models and Noncommutative Geometry**, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, 18B: 29-47, (1990).
- [Col] John Collins: **Renormalization**: Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [Dr,Itz] Jean-Michel Drouffe, Claude Itzykson, **Statistical Field Theory I**, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Fo,Jo,St,Ei] C. Ford, D.R.T. Jones, P.W. Stephenson, M.B. Einhorn: **The Effective Potential and the Renormalisation Group**, *Nucl. Phys. B*, 395: 295, (1993); hep-lat/9210033.
- [For] Otto Forster: **Analysis 2**, Grundlehrer Mathematik, Vieweg Studium, 1991.
- [Fr] Thomas Friedrich: **Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie**, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1997.
- [Gi] Peter B. Gilkey: **Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem**, Second Edition, Studies in advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- [Gr] Werner Greub: **Multilinear Algebra, 2nd Edition**, Springer Berlin Heidelberg, 1978.
- [Hä] Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann: **Numerische Mathematik**, Springer-Verlag, 1991.
- [Heu] H. Heuser, **Gewöhnliche Differentialgleichungen**, B.G. Teubner Stuttgart, 1991.
- [Io,Ka,Sch] Bruno Iochum, Daniel Kastler, Thomas Schücker: **Fussy Mass Relations for the Higgs**, *J.Math.Phys.*, 36: 6232-6254 (1995); hep-th/9506044.
- [Io,Ka,SchII] Bruno Iochum, Daniel Kastler, Thomas Schücker: **Fuzzy Mass Relations in the Standard Model**, hep-th/9507150.
- [Io,Sch] Bruno Iochum, Thomas Schücker: **Yang-Mills-Higgs versus Connes-Lott**, *Commun.Math.Phys.*, 178: 1-26 (1996); hep-th/9501142.
- [Ka,Sch] Daniel Kastler, Thomas Schücker: **The Standard Model à la Connes-Lott**, *J.Geom.Phys.*, 24: 1-19, (1997); hep-th/941218.
- [Ka,SchII] Daniel Kastler, Thomas Schücker: **A Detailed Account of Connes' Version of the Standard Model IV**, *Rev.Math.Phys.*, 8: 205-228, (1996); hep-th/9501077.
- [Ka,Wa] W. Kalau, M. Walze: **Gravity, Non-Commutative Geometry and the Wodzicki Residue**, *J.Geom.Phys.*, 16: 327-344, (1995); gr-qc/9312031.
- [Na] Otto Nachtmann: **Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik**, Vieweg, 1986.

- [Nak] Mikio Nakahara: **Geometry, Topology and Physics**, Graduate Student Series in Physics, 1990.
- [Ram] Pierre Ramond: **Field Theory: A Modern Primer (Second Edition)**, Frontiers in Physics Lecture Notes Series, Addison-Wesley, 1998.
- [Ro] J. L. Rosner: **Resource Letter SM-1: The Standard Model and Beyond**; hep-ph/0206176.
- [Sal] Manfred Salmhofer: **Renormalisation An Introduction**, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1999.
- [Sch,Zy] Thomas Schücker, Jean-Marc Zylinsky: **Connes' Model Building Kit**, *J.Geom.Phys.*, 16: 207-236, (1995); hep-th 9312186.
- [Str,Wei] K. Strehmel, R. Weiner: **Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen**, Teubner Studienbücher: Mathematik, Teubner, 1995.
- [Su,Win] R. Sulnake, P. Wintgen: **Differentialgeometrie und Faserbündel**, Mathematische Reihe, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1972.
- [Tol] Jürgen Tolksdorf: **The Einstein-Yang-Mill-Higgs Action and the Dirac-Yukawa Operator**, *J.Math.Phys.*, 39: 2213-2241, (1998); hep-th/961249v3.
- [Tol2] Jürgen Tolksdorf: **Zur Geometrie spontan gebrochener Eichtheorien und Operatoren vom Dirac-Typ**, Habilitationsschrift zur Erlangung der Venia Legendi im Fachgebiet Mathematik an der Universität Mannheim, (2002).
- [Tol3] Jürgen Tolksdorf: **Clifford Modules and Generalized Dirac Operators**, *Int. J. Theor. Phys.*, Vol.: 40 1 (2002).
- [Zi] Jean Zinn-Justin: **Quantum Field Theory and Critical Phenomena**, International Series of Monographs on Physics 92, Oxford Science Publications, 1999.

# Lebenslauf

- 12.2.1971: Geburt im Kreiskrankenhaus Großburgwedel als erster Sohn von Volker und Elisabeth Thumstädter.
- 1974-1977: Besuch des Kindergartens Hohenhameln.
- 1977-1981: Besuch der Grundschule Hohenhameln.
- 1981-1983: Besuch der Orientierungsstufe Hohenhameln.
- 1983-1990: Besuch des Scharnhorstgymnasiums in Hildesheim.
- Frühjahr 1990: Beendigung der Schule mit dem Abitur und Antritt des Wehrdienstes in Wesendorf.
- Oktober 1990: Verweigerung des Kriegsdienstes und Beginn des Zivildienstes in der Heimstatt Röderhof bei Diekholzen.
- Oktober 1991: Beginn des Physikstudiums an der Universität Hannover.
- Oktober 1993: Erfolgreiches Ablegen der Diplomvorprüfung in Physik.
- Oktober 1995: Erfolgreiches Ablegen der Diplomvorprüfung in Mathematik.
- November 1996: Beginn der Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik über BRS-Kohomologien bei  $N=2$  Supersymmetrien.
- 27.2.1998: Beendigung des Physikstudiums mit dem Diplom.
- 12.5.-15.9.1998: Arbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Curt-Risch- Institut Hannover.
- ab 29.9.1998: Doktorand im Institut für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim.